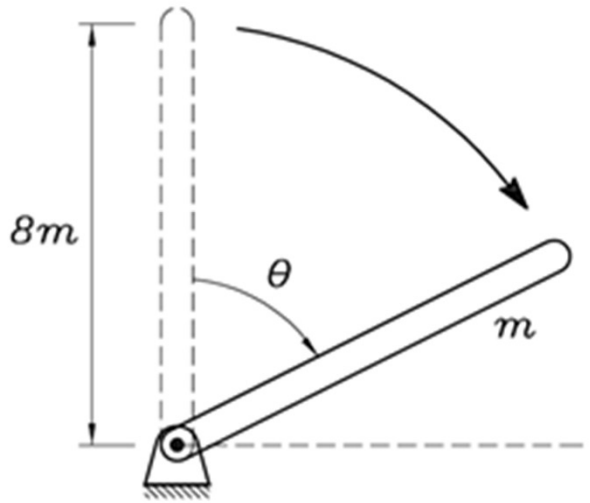
# Mechanical Vibration
# ارتعاشات مکانیکی(درس هشتم)

**By: Reza Tikani**
**Mechanical Engineering Department**
**Isfahan University of Technology**

# ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده ویسکوز
## حل چند مثال

**مثال ۱:**

دری به پهنای $0.8\ m$ و وزن $20\ kg$ توسط یک سیستم پیچشی به فنریت $100\ N.m/rad$ و مستهلک‌کننده ویسکوزی با ضریب $c$ بسته می‌شود.

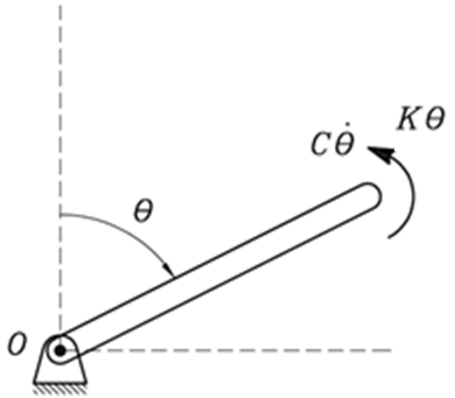



الف) معادله حرکت در را به دست آورید.

ب) مقدار $c$ را برای حالت استهلاک بحرانی محاسبه کنید.

ج) حساب کنید چه مدت طول می‌کشد که در از حالت سکون اولیه نشان داده شده، به اندازه $1°$ بسته شود.

# ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده ویسکوز
## حل چند مثال




الف) با توجه به دیاگرام آزاد روبرو و نوشتن قانون اویلر داریم:

$$I_o\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = 0$$

که جواب کلی آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\theta(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t)$$

ب) با توجه به مقادیر داده‌شده داریم:

$$I_o = \frac{mw^2}{3} = \frac{20\times(0.8)^2}{3} = 4.27\,kg.m^2 \qquad \text{و} \qquad k = 100\ N.m/rad$$

در نتیجه، خواهیم داشت:

$$c_c = 2\sqrt{kI_o} = 2\sqrt{100\times 4.27} = 41.3\,N.m.s/rad$$

# ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده ویسکوز
## حل چند مثال

ج) با توجه به این که موقعیت اولیه در، در حالت عمودی ($\theta = 90°$) است، برای حالت استهلاک بحرانی ($\zeta = 1$)، معادله حرکت و شرایط مرزی آن، به صورت زیر می‌باشد:

$$\left.\begin{aligned}\theta(t) &= e^{-\omega_n t}(A + Bt)\\ \theta(\circ) &= 90° = \frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\} \rightarrow \quad A = \frac{\pi}{2}$$

و همچنین:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= -\omega_n e^{-\omega_n t}(A + Bt) + Be^{-\omega_n t}\\ \dot{\theta}(\circ) &= 0\end{aligned}\right\} \rightarrow \quad -\omega_n A + B = 0 \quad \rightarrow \quad B = \omega_n A$$

از طرفی، با توجه به این که داریم:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{I_o}} = \sqrt{\frac{100}{4.27}} = 4.84$$

می‌توان با جایگذاری مقادیر در معادله حرکت به دست آمده برای حالت استهلاک بحرانی، زمان مورد نیاز برای تغییر مکان در به میزان $1°$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$\theta(t) = 1° = \frac{\pi}{180} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{180} = e^{-4.84t}\left(\frac{\pi}{2} + 4.84 \times \frac{\pi}{2}t\right) = \frac{\pi}{2}e^{-4.84t}(1 + 4.84t)$$

با محاسبه $t$ از رابطه بالا، خواهیم داشت:

$$t = 1.3\ s$$

# ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده ویسکوز
# حل چند مثال

**مثال ۲:**

برای تعیین مقدار استهلاک یک پل، وزنه‌ای از ارتفاع مشخصی بر روی وسط دهانه آن رها شده و سبب ارتعاش آزاد پل در فرکانس طبیعی اول می‌گردد. میزان ارتعاش پل، توسط دستگاهی ثبت شده و فرکانس طبیعی پل، برابر $1.5\ Hz$ به دست می‌آید. دامنه ارتعاش پل، پس از گذشت $2\ s$، به $0.9$ مقدار اولیه خود می‌رسد. جرم معادل پل نیز برابر $10^5\ kg$ فرض می‌شود.

با در نظر گرفتن استهلاک ویسکوز و حرکت ارتعاشی هارمونیک آن، ضریب استهلاک آن را به دست آورید.

# ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده ویسکوز
## حل چند مثال

با توجه به مقدار فرکانس اندازه‌گیری شده، داریم:

$$f = 1.5\ Hz \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}\ s$$

بنابراین، پس از گذشت دو ثانیه، سیستم سه ارتعاش داشته است؛ به عبارتی:

$$n = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3\ s$$

بدین ترتیب، با توجه به رابطه کاهش لگاریتمی، داریم:

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{x_1}{x_n} = \frac{1}{3}\ln\frac{1}{0.9} = 0.035$$

بدین ترتیب، با توجه به رابطه کاهش لگاریتمی، داریم:

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{x_1}{x_n} = \frac{1}{3}\ln\frac{1}{0.9} = 0.035$$

برای مقادیر کوچک $\zeta$ داریم:

$$\delta \approx 2\pi\zeta \quad \rightarrow \quad \zeta = 0.0056$$

مجدداً با توجه به کوچک بودن مقدار $\zeta$ می‌توان مقدار فرکانس مستهلک‌شده را به صورت زیر محاسبه کرد:

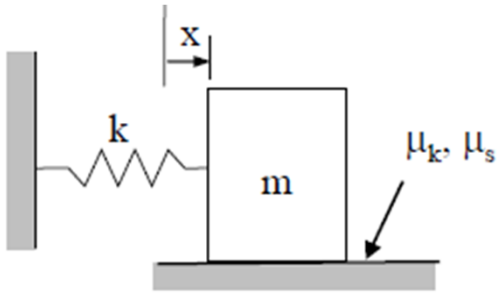
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1.5\times 2\pi = 9.42\ rad/s$$

در نتیجه، مقدار ضریب استهلاک سیستم را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

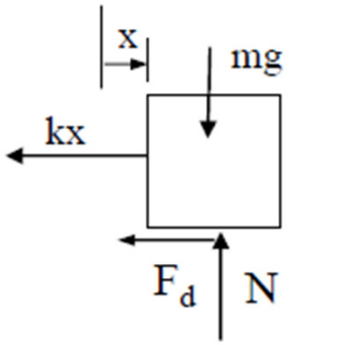
$$c = c_c\zeta = 2\zeta\sqrt{km} = 2\zeta m\omega_n$$
$$= 2\times 0.0056\times 10^5\times 9.42 = 10550.4\ N.m.s/rad$$

# ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با اصطکاک خشک

Damping Force: $F_d = \mu_k N$



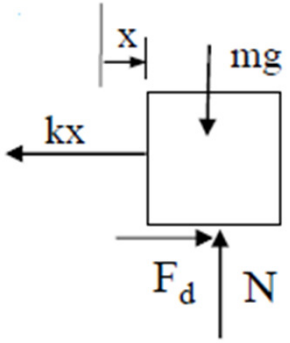

جهت حرکت




$$m\ddot{x} + kx = -F_d$$

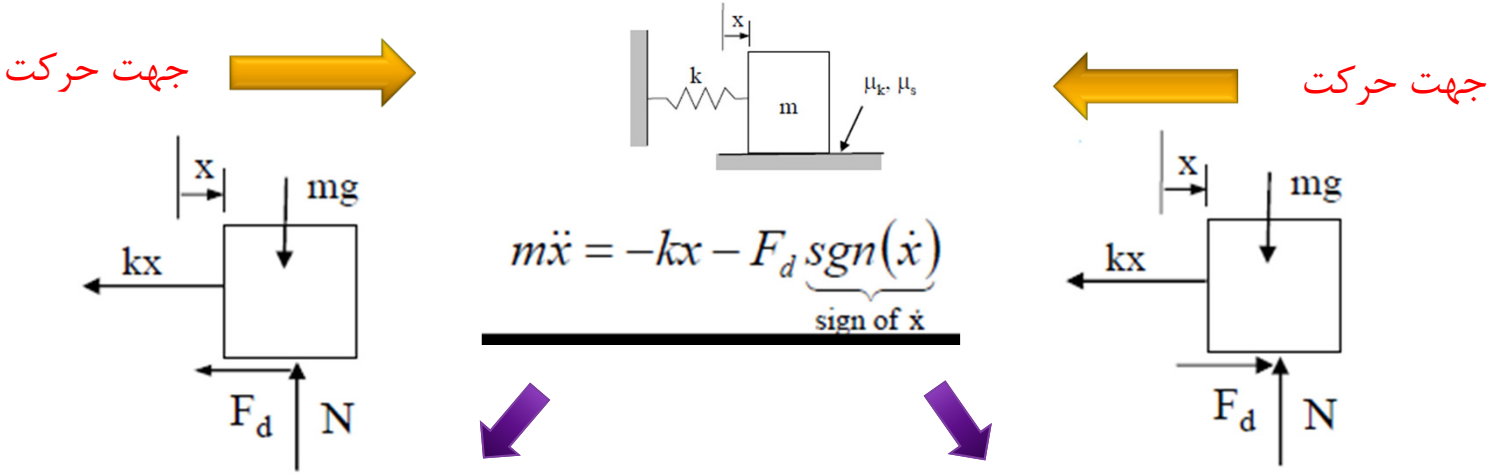
$$m\ddot{x} = -kx - F_d \underbrace{sgn(\dot{x})}_{\text{sign of } \dot{x}}$$

جهت حرکت




$$m\ddot{x} + kx = F_d$$

# ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با اصطکاک خشک




$$m\ddot{x} + kx = -F_d$$

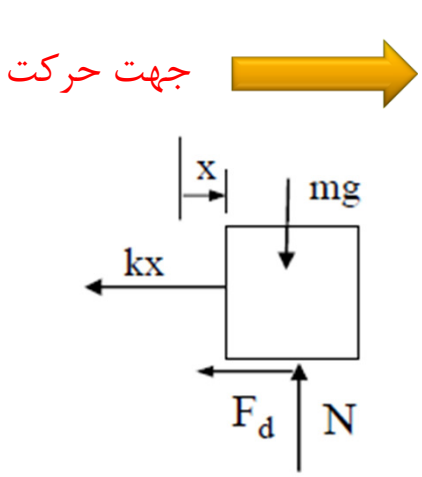
$$\frac{\ddot{x}}{\omega_n^2} + x = -\frac{F_d}{k}$$

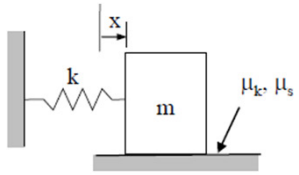
$$m\ddot{x} + kx = F_d$$

$$\frac{\ddot{x}}{\omega_n^2} + x = \frac{F_d}{k}$$

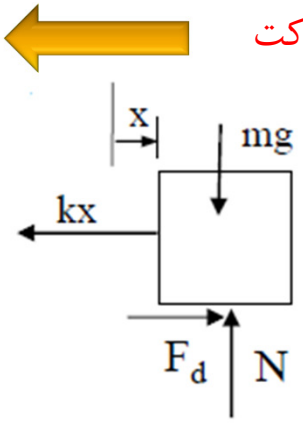
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

# ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با اصطکاک خشک




$$m\ddot{x} = -kx - F_d \underbrace{sgn(\dot{x})}_{\text{sign of } \dot{x}}$$




$$\frac{\ddot{x}}{\omega_n^2} + x = -\frac{F_d}{k}$$

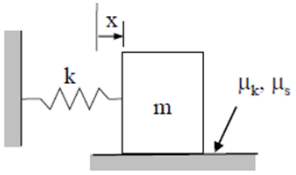
$$x(t) = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t - \frac{F_d}{k}$$

$$\frac{\ddot{x}}{\omega_n^2} + x = \frac{F_d}{k}$$

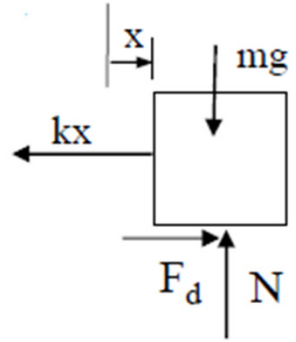
$$x(t) = A_3 \cos\omega_n t + A_4 \sin\omega_n t + \frac{F_d}{k}$$

# ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با اصطکاک خشک

نیم سیکل اول




جهت حرکت




$$\frac{\ddot{x}}{\omega_n^2} + x = \frac{F_d}{k}$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$x(t) = A_3 \cos\omega_n t + A_4 \sin\omega_n t + \frac{F_d}{k}$$

جایگذاری شرایط اولیه:

$$\begin{cases} A_3 = x_0 - \dfrac{F_d}{k} \\ A_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \left(x_0 - \frac{F_d}{k}\right) cos\omega_n t + \frac{F_d}{k} \qquad 0 < t < \frac{\pi}{\omega_n}$$

# ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با اصطکاک خشک

نیم سیکل دوم

جهت حرکت

$$\frac{\ddot{x}}{\omega_n^2} + x = -\frac{F_d}{k}$$

$$x(t) = A_1 \cos\omega_n t' + A_2 \sin\omega_n t' - \frac{F_d}{k}$$

شرایط اولیه برای لحظه $t = 0$ معادل موقعیت جرم در حالت $t = \frac{\pi}{\omega_n}$ می باشد.

$$x(t' = 0) = -\left(x_0 - \frac{2F_d}{k}\right)$$

$$\dot{x}(t' = 0) = 0$$

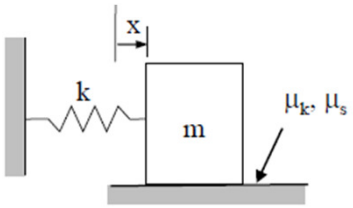
جایگذاری شرایط اولیه

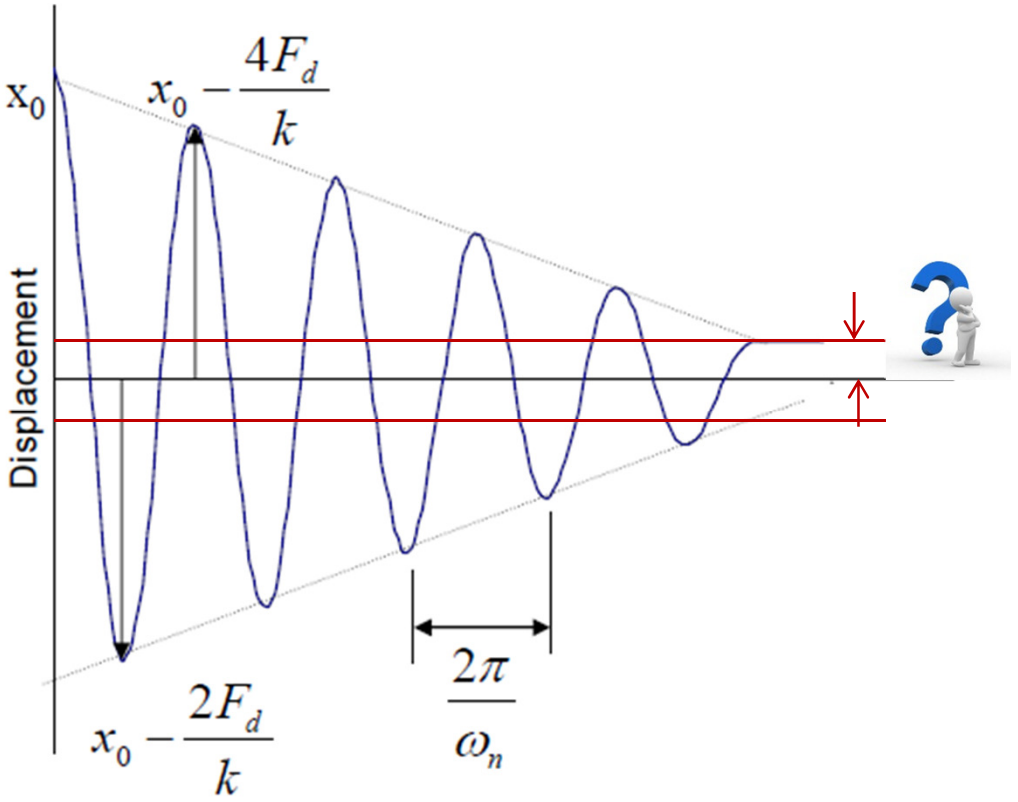
$$x(t') = \left(x_0 - \frac{3F_d}{k}\right) cos\omega_n t' - \frac{F_d}{k}$$

$$0 < t' < \frac{\pi}{\omega_n}$$

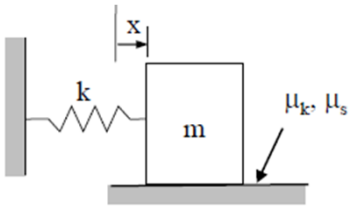
$$\frac{\pi}{\omega_n} < t < \frac{2\pi}{\omega_n}$$

# ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با اصطکاک خشک



# ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با اصطکاک خشک




توقف حرکت:

$$x_0 - r\frac{2F_d}{k} \le \frac{F_d}{k}$$

$$x_n \le \frac{F_d}{k}$$

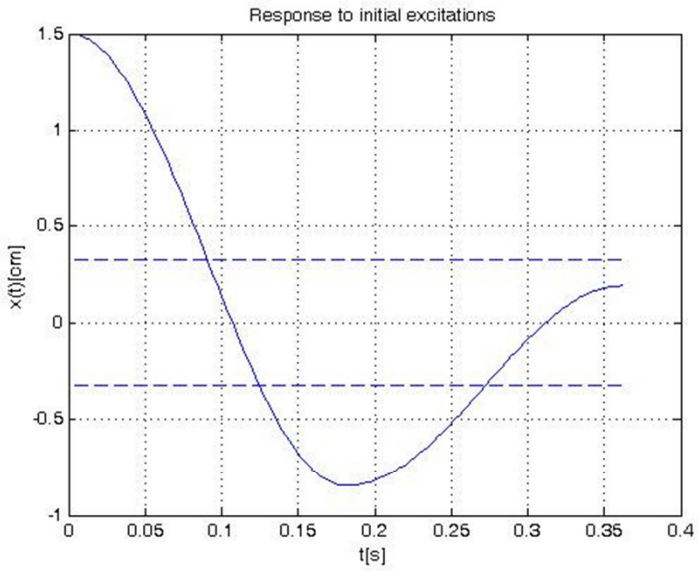
$$r \ge \frac{x_0 - \frac{F_d}{k}}{2\frac{F_d}{k}}$$

✓ تعداد نیم سیکلی که حرکت پس از آن متوقف می شود:

# ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با اصطکاک خشک

## برنامه نوشته شده در MATLAB:

```
>> m=100; % Mass
k=30000; % Stiffness
mus=0.1; % Static friction coefficient
muk=0.1; % Kinetic friction coefficient
x0=1.5; % Initial displacement
t0=0;
deltat=0.002; % Time increment
wn=sqrt(k/m); % Natural frequency
fd=100*muk*m*9.81/k;
N=ceil(0.5*((x0-(1+mus/muk)*fd)/fd+1)); % Half cycles
t=[];
x=[];
if N>0
for n=1:N,
t1=[t0:deltat:t0+pi/wn];
x1=(x0-(2*n-1)*fd)*cos(wn*t1)+fd*(-1)^(n+1);
t=[t t1];
x=[x x1];
t0=t0+pi/wn;
end
end
plot(t,x,t,fd*ones(length(t)),'--',t,-fd*ones(length(t)),'--')
title('Response to initial excitations')
xlabel('t[s]')
ylabel('x(t)[cm]')
grid
```




$$x_0 - (2n-1)f_d < \left(1 + \frac{\mu_s}{\mu_f}\right) f_d$$