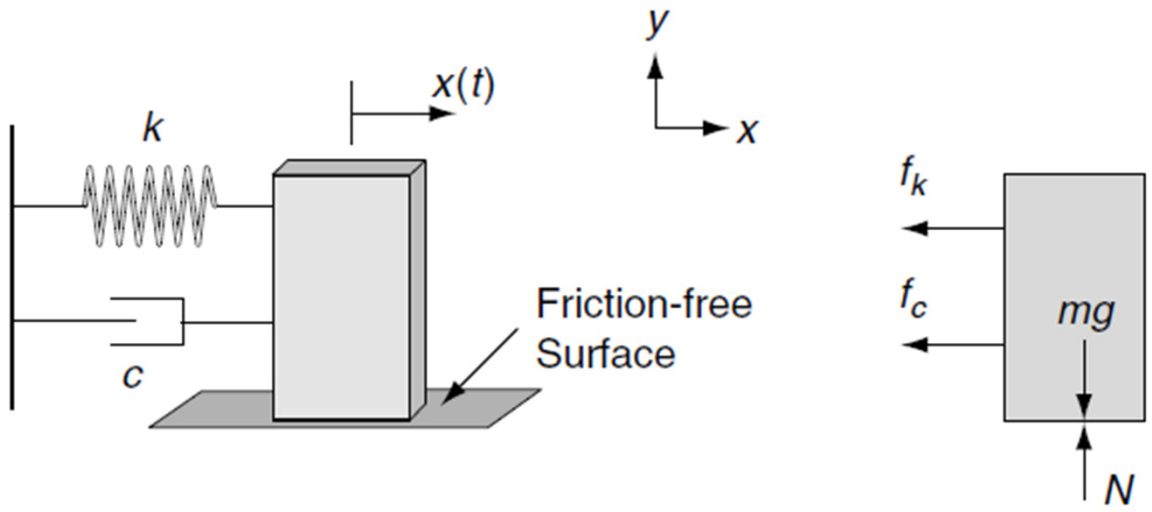
Mechanical Vibration
ارتعاشات مکانیکی(درس ششم)

By: Reza Tikani
Mechanical Engineering Department
Isfahan University of Technology

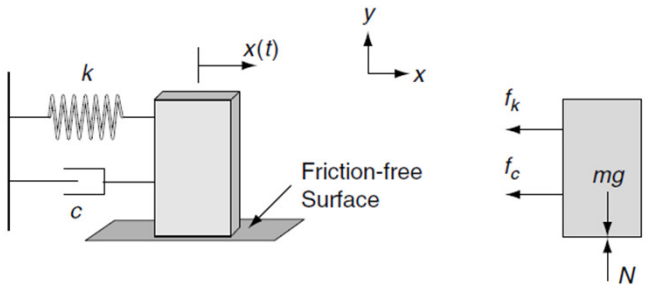
ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده ویسکوز

استخراج معادلات حرکت برای سیستم جرم و فنر و دمپر:



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده ویسکوز



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$x(t) = A\,e^{\lambda t}$$

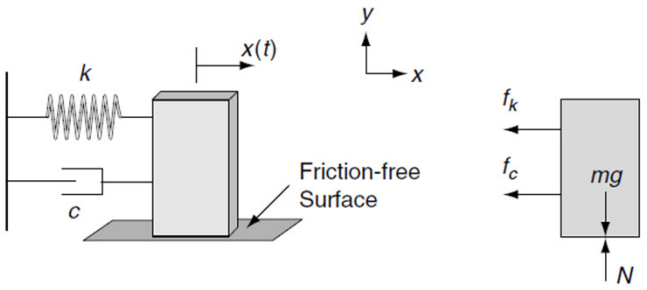
$$A\left(\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m}\right)e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

معادله مشخصه سیستم:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}$$

ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده ویسکوز



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

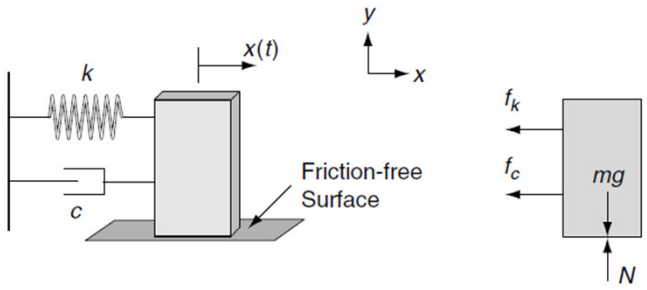
$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$ نسبت استهلاک:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$ فرکانس طبیعی میرا:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}$$

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta\omega_n \pm \omega_d j, \qquad 0 < \zeta < 1$$

ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده ویسکوز



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

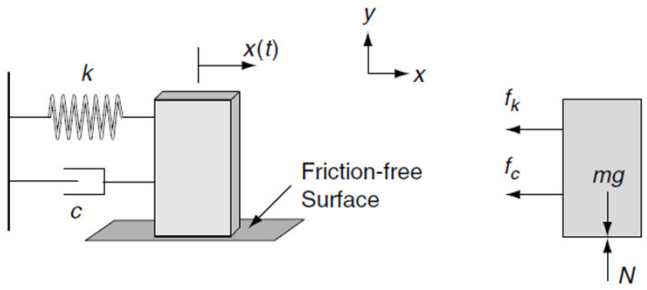
Case 1) Under damped: $0 < \zeta < 1$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\,(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t)$$

یا:

$$x(t) = Ce^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi)$$

ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده ویسکوز



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

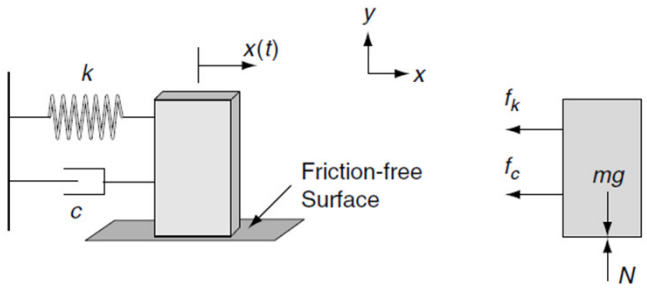
Case 1) Under damped: $0 < \zeta < 1$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right) \qquad x(t) = Ce^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_d t + \phi\right)$$

$$A = x_0, \qquad C = \frac{\sqrt{(v_0 + \zeta\omega_n x_0)^2 + (x_0\omega_d)^2}}{\omega_d}$$

$$B = \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}, \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{x_0\omega_d}{v_0 + \zeta\omega_n x_0}\right)$$

ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده ویسکوز



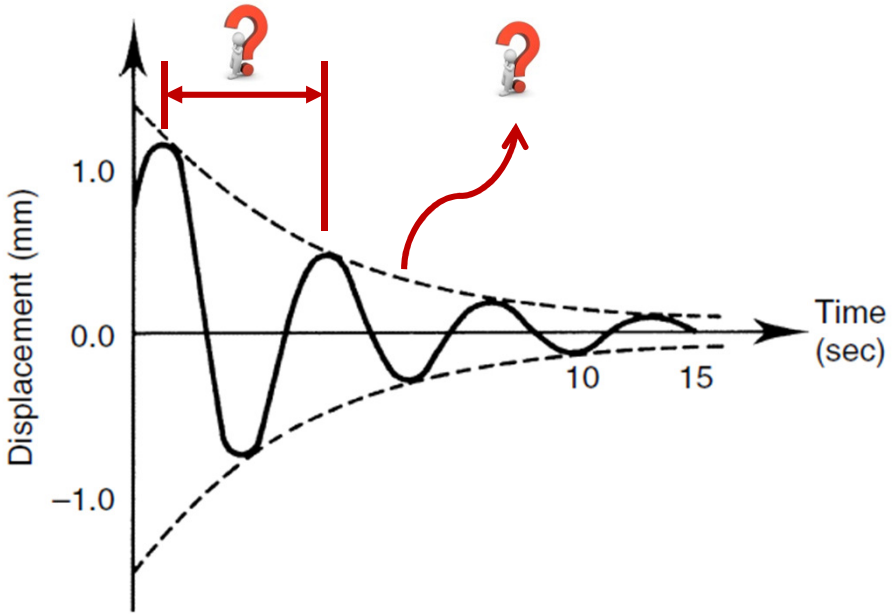
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Case 1) Under damped:

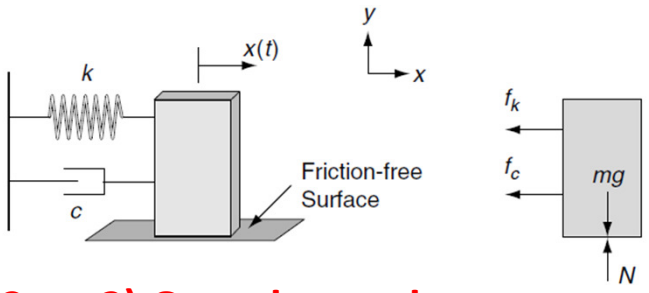
$$0 < \zeta < 1$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right)$$

$$x(t) = Ce^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_d t + \phi\right)$$



ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده ویسکوز



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

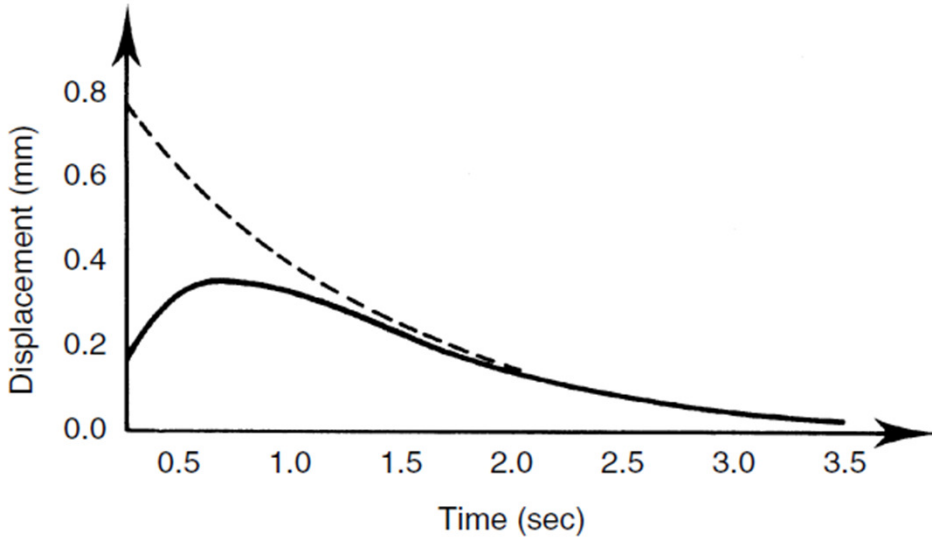
Case 2) Over damped: $\zeta > 1$

$$x(t) = A\,e^{\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t} + B\,e^{\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}$$

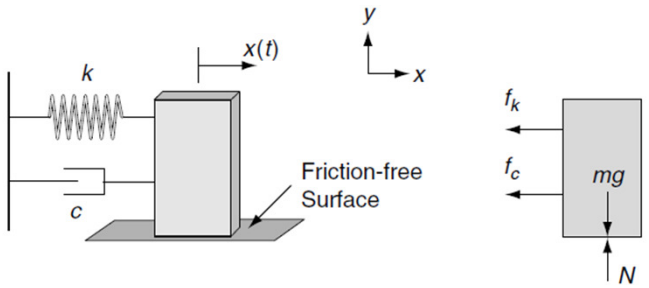
$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

$$A = \frac{v_0 + \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n x_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$

$$B = -\frac{v_0 + \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n x_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$



ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده ویسکوز



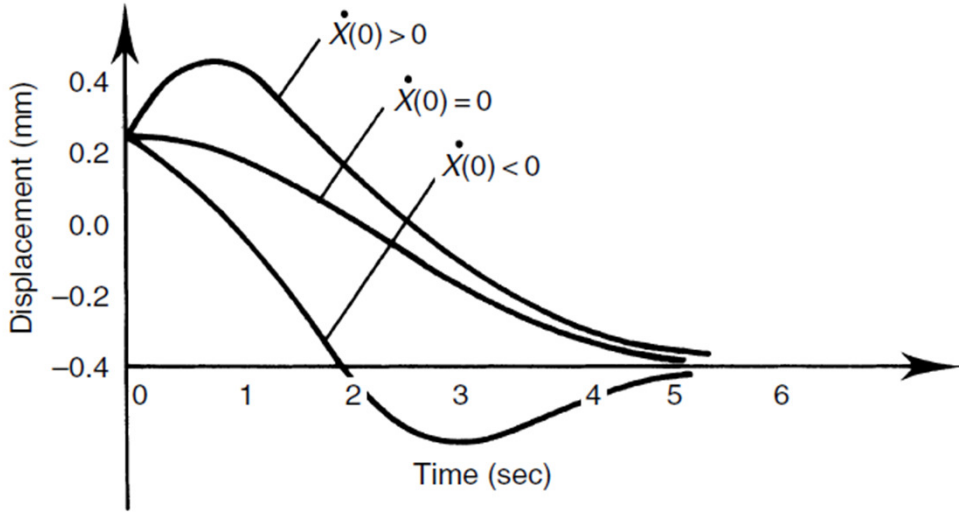
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Case 3) Critically damped:

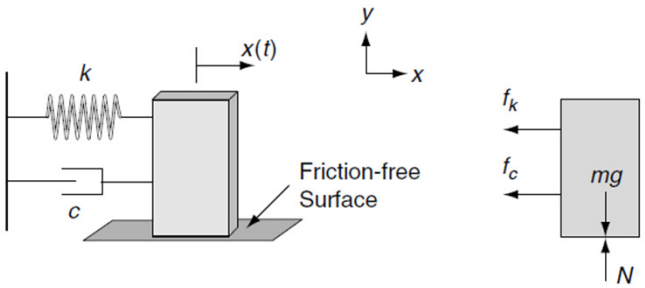
$$\zeta = 1$$

$$x(t) = e^{-\omega_n t}\left[(v_0 + \omega_n x_0)t + x_0\right]$$

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$



ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده ویسکوز



- ✓ رسم پاسخ ارتعاشات آزاد سیستم روبرو در نرم افزار MATLAB

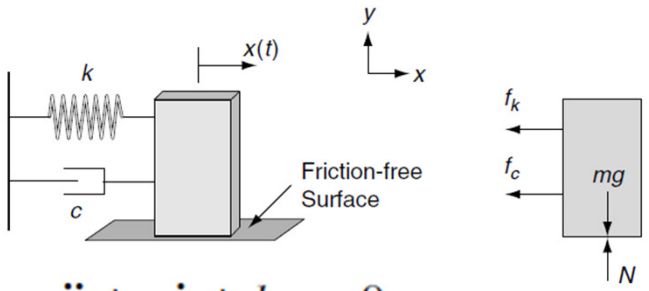
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$m = 100\,\text{kg},\ c = 25\,\text{kg/s},\ \text{and}\ k = 1000\,\text{N/m},$$

$$x_0 = 0.01\,\text{m},\ v_0 = 0$$

```
>> x0=0.01;v0=0.0;m=100;c=25;k=1000;
>> wn=sqrt(k/m);z=c/(2*sqrt(k*m))
>> wd=wn*sqrt(1-z^2);
>> t=(0:0.01:15*(2*pi/wn));
>> x=exp(-z*wn*t).*(x0*cos(wd*t)+((v0+z*wn*x0)/wd)*sin(wd*t));
>> plot(t,x)
```

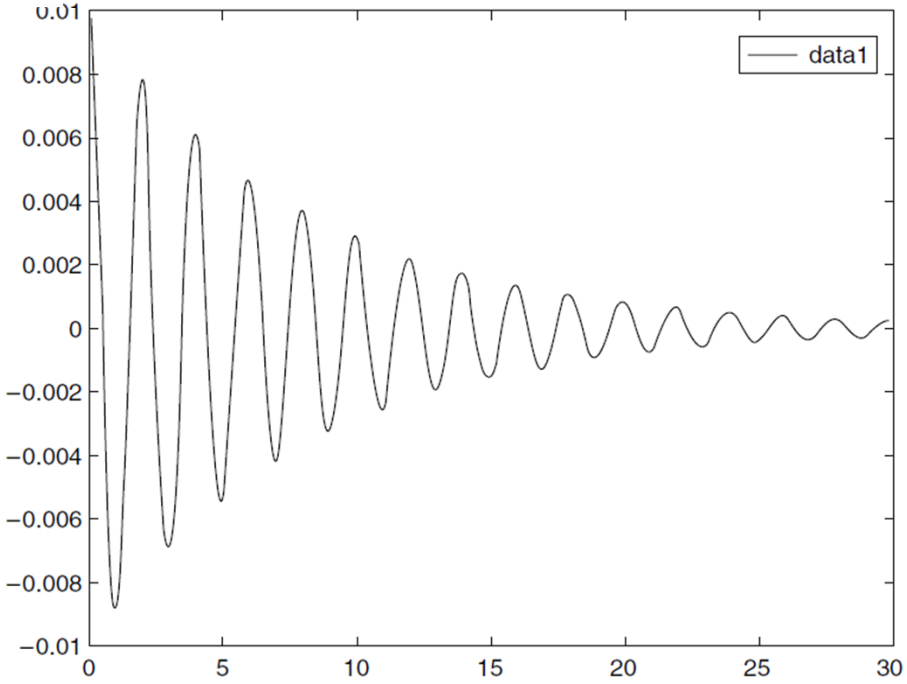
ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده ویسکوز



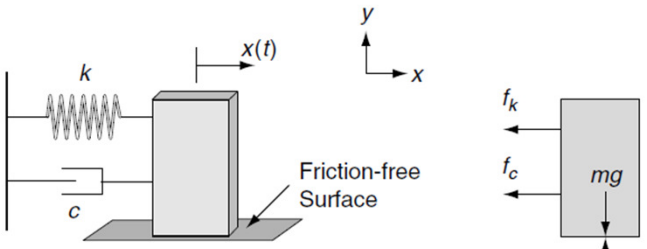
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

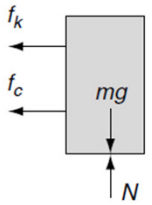
- ✓ رسم پاسخ ارتعاشات آزاد سیستم روبرو در نرم افزار MATLAB

$$m = 100\,\text{kg},\ c = 25\,\text{kg/s},\ \text{and}\ k = 1000\,\text{N/m},$$
$$x_0 = 0.01\,\text{m},\ v_0 = 0$$



ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده ویسکوز





$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

- ✓ رسم پاسخ ارتعاشات آزاد سیستم روبرو در نرم افزار MATLAB

$$m = 100\,\text{kg},\ c = 25\,\text{kg/s},\ \text{and}\ k = 1000\,\text{N/m},$$
$$x_0 = 0.01\,\text{m},\ v_0 = 0$$

- ✓ تمرین: پاسخ ارتعاشی سیستم فوق را بدون استفاده از فرم بسته پاسخ، با استفاده از فرم فضای حالت در نرم افزار MATLAB به دست آورید.