بسم الله الرحمن الرحیم

Mechanical Vibration

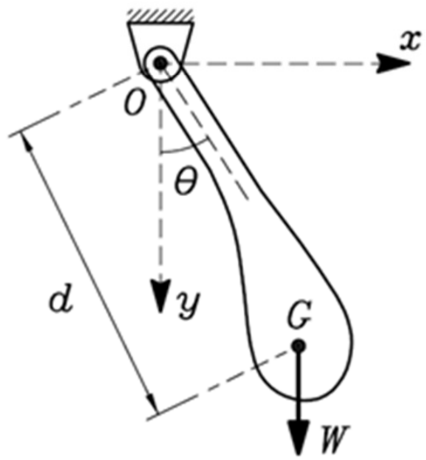
ارتعاشات مکانیکی(جلسه چهارم)

By: Reza Tikani
Mechanical Engineering Department
Isfahan University of Technology

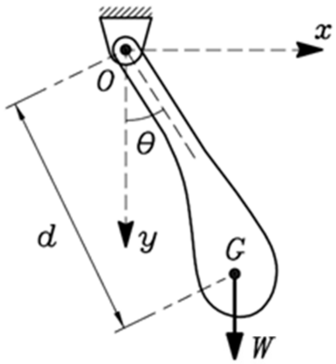
ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی بدون مستهلک کننده – حل چند مثال

- **مثال ۱:**

پاندول مرکبی را مطابق شکل زیر، در نظر بگیرید. وزن پاندول، W و فاصله مرکز ثقل آن از مرکز آویز (نقطه O)، برابر d است. چنانچه ممان اینرسی پاندول حول O، برابر J_O باشد، فرکانس طبیعی و معادله ارتعاش سیستم را برای ارتعاشات کوچک به دست آورید.



ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی بدون مستهلک کننده – حل چند مثال



- **مثال ۱:**

ابتدا، معادله حرکت را برای نقطه آویز O می‌نویسیم:

$$\sum M_o = J_o\ddot{\theta}$$

$$\rightarrow \quad J_o\ddot{\theta} = -Wd\sin\theta \quad \rightarrow \quad J_o\ddot{\theta} + Mgd\sin\theta = 0 \qquad (۱)$$

با توجه به این که برای ارتعاشات کوچک، $\sin\theta \approx \theta$ است، بنابراین، خواهیم داشت:

$$J_o\ddot{\theta} + Mgd\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{J_o}\theta = 0 \qquad (۲)$$

بنابراین، فرکانس طبیعی ارتعاشات کوچک سیستم، برابر خواهد بود با:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{Mgd}{J_o}} = \sqrt{\frac{g}{J_o / Md}}$$

ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی بدون مستهلک کننده — حل چند مثال

- **مثال ۱:**

J_o / Md را طول معادل برای پاندول مرکب می‌نامند. در این صورت، اگر شعاع ژیراسیون پاندول مرکب را برابر k_o در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$L_{eq} = \frac{J_o}{Md} = \frac{Mk_o^{۲}}{Md} = \frac{k_o^{۲}}{d}$$

از طرفی، $k_o^{۲} = k_g^{۲} + d^{۲}$ می‌باشد. بنابراین:

$$L_{eq} = \frac{k_g^{۲}}{d} + d$$

ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی بدون مستهلک کننده— حل چند مثال

- **مثال ۱:**

J_o / Md را طول معادل برای پاندول مرکب می‌نامند. در این صورت، اگر شعاع ژیراسیون پاندول مرکب را برابر k_O در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

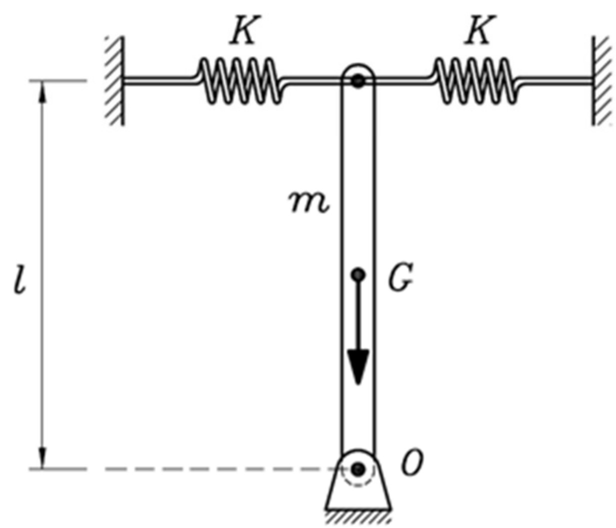
$$L_{eq} = \frac{J_o}{Md} = \frac{Mk_o^{۲}}{Md} = \frac{k_o^{۲}}{d}$$

از طرفی، $k_o^{۲} = k_g^{۲} + d^{۲}$ می‌باشد. بنابراین:

$$L_{eq} = \frac{k_g^{۲}}{d} + d$$

- **مثال ۲:**

معادله حرکت و فرکانس طبیعی ارتعاش را برای سیستم نشان داده شده در شکل زیر، پیدا کنید و راجع به نوع حرکت سیستم، بحث نمایید.

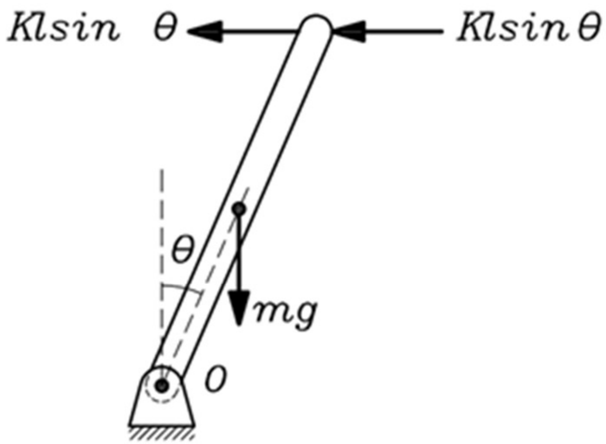


ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی بدون مستهلک کننده – حل چند مثال

- **مثال ۲:**

حل:

ابتدا با توجه به دیاگرام آزاد جسم، می‌توان نوشت:



$$\sum M_o = I_o\ddot{\theta}$$

$$\rightarrow \quad I_o\ddot{\theta} = mg\frac{l}{۲}\sin\theta - (۲kl\sin\theta)l\cos\theta \quad (۱)$$

از طرفی، ممان اینرسی میله یکنواخت با طول l حول انتهای درگیر آن، برابر است با:

$$I_o = \frac{ml^۲}{۳} \quad (۲)$$

- **مثال ۲:**

که با جایگذاری در معادله (۱) به دست می آید:

$$\frac{ml^{۲}}{۳}\ddot{\theta}+۲kl^{۲}\sin\theta\cos\theta-mg\frac{l}{۲}\sin\theta=۰$$

با توجه به این که برای ارتعاشات کوچک، داریم $\sin\theta\approx\theta$ و $\cos\theta\approx ۱$، می‌توان نوشت:

$$\frac{ml^{۲}}{۳}\ddot{\theta}+\left(۲kl^{۲}-\frac{mgl}{۲}\right)\theta=۰ \qquad (۳)$$

$$\ddot{\theta}+\frac{۱۲kl^{۲}-۳mgl}{۲ml^{۲}}\theta=۰ \qquad (۴)$$

- **مثال ۲:**

$$\ddot{\theta}+\frac{12kl^2-3mgl}{2ml^2}\theta=0 \qquad (4)$$

حال، سه حالت مختلف زیر را بررسی می‌کنیم:

- حالت اول: $12kl^2 - 3mgl > 0$

در این حالت، حرکت، نوسانی بوده و فرکانس حرکت برابر است با:

$$\omega_n^2=\frac{12kl^2-3mgl}{2ml^2}$$

و معادله حرکت نیز به صورت زیر است:

$$\theta(t)=A\sin\omega_n t+B\cos\omega_n t$$

که در آن، ضرایب A و B از شرایط اولیه، محاسبه می‌شوند.

ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی بدون مستهلک کننده – حل چند مثال

- **مثال ۲:**

$$\ddot{\theta}+\frac{۱۲kl^{۲}-۳mgl}{۲ml^{۲}}\theta=۰ \qquad (۴)$$

– حالت دوم: $12kl^2 - 3mgl = 0$

در این حالت:

$$\ddot{\theta}=۰ \quad \rightarrow \quad \theta(t)=C_{۱}t+C_{۲}$$

بنابراین، حرکت به صورت نوسانی نبوده و θ با زمان زیاد می‌شود. از آنجا که با گذشت زمان، فرض θ کوچک، دیگر صادق نیست، حرکت سیستم باید به صورت غیرخطی در نظر گرفته شود.

ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی بدون مستهلک کننده – حل چند مثال

- **مثال ۲:**

$$\ddot{\theta}+\frac{12kl^{2}-3mgl}{2ml^{2}}\theta=0 \qquad (4)$$

– حالت سوم: $12kl^2 - 3mgl < 0$

در این حالت، با فرض $\frac{3mgl-12kl^{2}}{2ml^{2}}=\alpha>0$، معادله حرکت سیستم، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\ddot{\theta}-\alpha\theta=0 \quad \rightarrow \quad \theta(t)=C_{1}e^{\alpha t}+C_{2}e^{-\alpha t}$$

که در آن، ضرایب C_1 و C_2 از شرایط اولیه، به دست می‌آید. در اینجا نیز θ با گذشت زمان مرتباً افزایش می‌یابد و بنابراین، برای θهای بزرگ، باید معادله به صورت غیرخطی حل شود.

ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی بدون مستهلک کننده — حل چند مثال

- **مثال ۲:**

$$\ddot{\theta}+\frac{۱۲kl^{۲}-۳mgl}{۲ml^{۲}}\theta=۰ \qquad (۴)$$

– حالت سوم: $12kl^2 - 3mgl < 0$

در این حالت، با فرض $\frac{۳mgl-۱۲kl^{۲}}{۲ml^{۲}}=\alpha>۰$ ، معادله حرکت سیستم، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\ddot{\theta}-\alpha\theta=۰ \quad \rightarrow \quad \theta(t)=C_{۱}e^{\alpha t}+C_{۲}e^{-\alpha t}$$

که در آن، ضرایب C_1 و C_2 از شرایط اولیه، به دست می‌آید. در اینجا نیز θ با گذشت زمان مرتباً افزایش می‌یابد و بنابراین، برای θهای بزرگ، باید معادله به صورت غیرخطی حل شود.

ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی بدون مستهلک کننده

- روش انرژی:

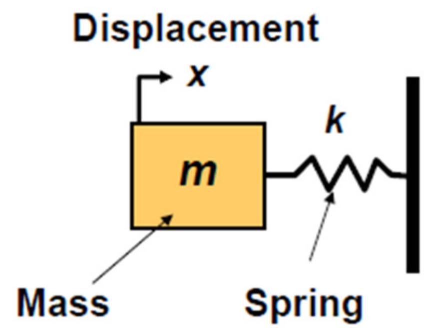
در صورتیکه انرژی کل سیستم ثابت باقی بماند، آن سیستم را پایستار (Conservative) گویند.

$$T + U = \text{ثابت}$$

$$\frac{d}{dt}(T+U) = ۰$$

ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی بدون مستهلک کننده

- روش انرژی:

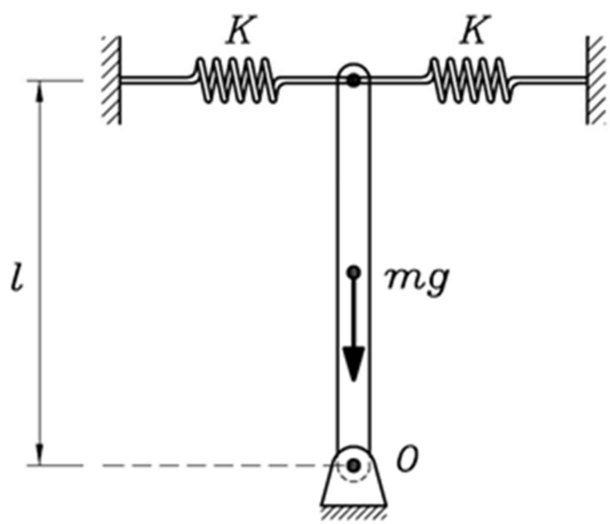


$$\frac{d}{dt}(T+U)=0$$

ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی بدون مستهلک کننده

- روش انرژی-مثال:

معادله حرکت و فرکانس طبیعی نوسانات کوچک سیستم را از روش انرژی به دست آورید.

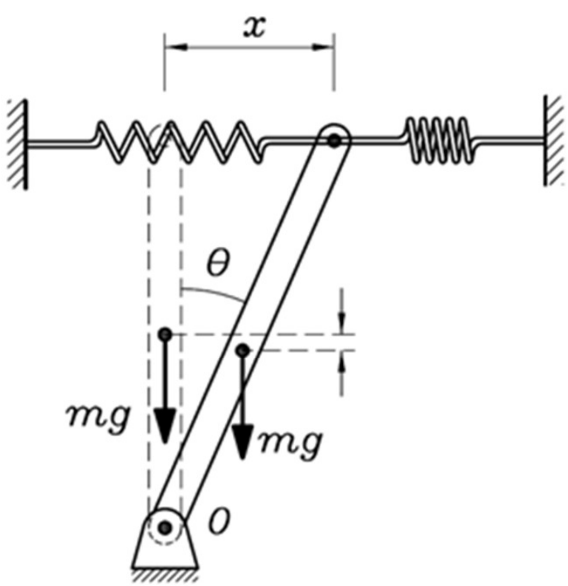


ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی بدون مستهلک کننده

- روش انرژی-مثال:

حل:

انرژی پتانسیل ناشی از فنرها، گرانش و انرژی پتانسیل کل، به ترتیب به صورت زیر می‌باشد:



$$U_e = \frac{۱}{۲}(۲k)x^۲ = k(l\sin\theta)^۲$$

$$U_g = mg(\frac{l}{۲}\cos\theta - \frac{l}{۲})$$

$$U = k(l\sin\theta)^۲ + mg\frac{l}{۲}(\cos\theta - ۱) \qquad (۱)$$

انرژی جنبشی سیستم نیز برابر است با:

$$T = \frac{۱}{۲}I_o\dot{\theta}^۲ = \frac{۱}{۶}ml^۲\dot{\theta}^۲ \qquad (۲)$$

ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی بدون مستهلک کننده

- روش انرژی-مثال:

در نتیجه، خواهیم داشت:

$$T+U=\frac{۱}{۶}ml^{۲}\dot{\theta}^{۲}+kl^{۲}\sin^{۲}\theta+mg\frac{l}{۲}(\cos\theta-۱) \qquad (۳)$$

از آنجا که سیستم، پایستار است، می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dt}(T+U)=۰$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{۱}{۶}ml^{۲}\dot{\theta}^{۲}\right)+\frac{d}{dt}(kl^{۲}\sin^{۲}\theta)+\frac{d}{dt}\left(mg\frac{l}{۲}(\cos\theta-۱)\right)=۰$$

$$\rightarrow \quad \frac{۱}{۶}ml^{۲}(۲\dot{\theta}\ddot{\theta})+۲kl^{۲}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta+\frac{mgl}{۲}(-\dot{\theta}\sin\theta)=۰$$

ارتعاش آزاد سیستمهای یک درجه آزادی بدون مستهلک کننده

- **روش انرژی-مثال:**

پس از ساده‌سازی عبارت، خواهیم داشت:

$$\frac{ml^{۲}}{۳}\ddot{\theta}+۲kl^{۲}\sin\theta\cos\theta-\frac{mgl}{۲}\sin\theta=۰ \qquad (۴)$$

با فرض نوسانات کوچک، می‌توان با استفاده از روابط $\sin\theta\approx\theta$ و $\cos\theta\approx ۱$ نوشت:

$$\frac{ml^{۲}}{۳}\ddot{\theta}+۲kl^{۲}\theta-\frac{mgl}{۲}\theta=۰$$

یا

$$\ddot{\theta}+\frac{۱۲kl^{۲}-۳mgl}{۲ml^{۲}}\theta=۰ \qquad (۵)$$