بسم الله الرحمن الرحیم

Mechanical Vibration

ارتعاشات مکانیکی(درس بیست و یکم)

By: Reza Tikani
Mechanical Engineering Department
Isfahan University of Technology

تحلیل ارتعاشات اجباری سیستم دو درجه آزادی

❖ معادله های کلی حرکت یک سیستم دو درجه آزادی تحت نیروهای خارجی:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

با فرض نیروهای هارمونیک داریم:

$$F_j(t) = F_{j0} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}, \quad j = 1, 2$$

در نتیجه پاسخ سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$x_j(t) = x_{j0} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}, \quad j = 1, 2$$

با جایگذاری پاسخ هارمونیک در معادله حرکت، به معادله زیر می رسیم:

$$\begin{bmatrix} \left(-\omega^2 m_{11} + i \cdot \omega \cdot c_{11} + k_{11}\right) & \left(-\omega^2 m_{12} + i \cdot \omega \cdot c_{12} + k_{12}\right) \\ \left(-\omega^2 m_{12} + i \cdot \omega \cdot c_{12} + k_{12}\right) & \left(-\omega^2 m_{22} + i \cdot \omega \cdot c_{22} + k_{22}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}$$

تحلیل ارتعاشات اجباری سیستم دو درجه آزادی

$$\begin{bmatrix} \left(-\omega^2 m_{11} + i\cdot\omega\cdot c_{11} + k_{11}\right) & \left(-\omega^2 m_{12} + i\cdot\omega\cdot c_{12} + k_{12}\right) \\ \left(-\omega^2 m_{12} + i\cdot\omega\cdot c_{12} + k_{12}\right) & \left(-\omega^2 m_{22} + i\cdot\omega\cdot c_{22} + k_{22}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}$$

با توجه به رابطه فوق، امپدانس مکانیکی به صورت زیر تعریف می شود:

$$Z_{rs}(\omega) = -\omega^2 \cdot m_{rs} + i\cdot\omega\cdot c_{rs} + k_{rs}, \quad r,s = 1,2$$

ماتریس امپدانس به صورت زیر است:

$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) \\ Z_{12}(\omega) & Z_{22}(\omega) \end{bmatrix}$$

معکوس ماتریس امپدانس را ماتریس پاسخ فرکانسی گویند:

$$\left[H(\omega)\right] = \left[Z(\omega)\right]^{-1}$$

تحلیل ارتعاشات اجباری سیستم دو درجه آزادی

$$\begin{bmatrix} \left(-\omega^2 m_{11} + i\cdot\omega\cdot c_{11} + k_{11}\right) & \left(-\omega^2 m_{12} + i\cdot\omega\cdot c_{12} + k_{12}\right) \\ \left(-\omega^2 m_{12} + i\cdot\omega\cdot c_{12} + k_{12}\right) & \left(-\omega^2 m_{22} + i\cdot\omega\cdot c_{22} + k_{22}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}$$

با توجه به تعریف ماتریس امپدانس مکانیکی داریم:

$$[Z(\omega)]\{X(\omega)\} = \{F_0(\omega)\} \rightarrow \{X(\omega)\} = [Z(\omega)]^{-1}\{F_0(\omega)\} = [H(\omega)]\{F_0(\omega)\}$$

$$\{X(\omega)\} = \left[Z(\omega)\right]^{-1}\{F(\omega)\} = \left[H(\omega)\right]\{F(\omega)\}$$

و در نتیجه داریم:

$$x_1(\omega) = H_{11}(\omega)F_1(\omega) + H_{12}(\omega)F_2(\omega)$$
$$x_2(\omega) = H_{21}(\omega)F_1(\omega) + H_{22}(\omega)F_2(\omega)$$

تحلیل ارتعاشات اجباری سیستم دو درجه آزادی

مثال: سیستمی با معادله حرکت زیر را در نظر بگیرید، مطلوبست تعیین پاسخ سیستم به نیروی وارده:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \\ & m_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}\sin\omega t$$

با در نظر گرفتن پاسخ هارمونیک و جایگذاری در رابطه فوق داریم:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}\sin\omega t \Rightarrow \begin{bmatrix} (k_{11}-m_{11}\omega^2) & k_{12} \\ k_{21} & (k_{22}-m_{22}\omega^2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[Z(\omega)]\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

تحلیل ارتعاشات اجباری سیستم دو درجه آزادی

$$[Z(\omega)]\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_1\\0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=[Z(\omega)]^{-1}\begin{Bmatrix}F_1\\0\end{Bmatrix}=\frac{Adj[Z(\omega)]}{\det Z(\omega)}\begin{Bmatrix}F_1\\0\end{Bmatrix}$$

$$Adj[Z(\omega)]=\begin{bmatrix}\left(k_{22}-m_{22}\omega^2\right) & -k_{12}\\ -k_{21} & \left(k_{11}-m_{11}\omega^2\right)\end{bmatrix}$$

$$\det Z(\omega)=m_1 m_2\left(\omega_1^2-\omega^2\right)\left(\omega_2^2-\omega^2\right)$$

$$\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix}\left(k_{22}-m_{22}\omega^2\right) & -k_{12}\\ -k_{21} & \left(k_{11}-m_{11}\omega^2\right)\end{bmatrix}}{m_1 m_2\left(\omega_1^2-\omega^2\right)\left(\omega_2^2-\omega^2\right)}\begin{Bmatrix}F_1\\0\end{Bmatrix}$$

تحلیل ارتعاشات اجباری سیستم دو درجه آزادی

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \left(k_{22} - m_{22}\omega^2\right) & -k_{12} \\ -k_{21} & \left(k_{11} - m_{11}\omega^2\right) \end{bmatrix}}{m_1 m_2 \left(\omega_1^2 - \omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \omega^2\right)} \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$X_1 = \frac{\left(k_{22} - m_{22}\omega^2\right)F_1}{m_1 m_2 \left(\omega_1^2 - \omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \omega^2\right)}$$

$$X_2 = \frac{-k_{21}F_1}{m_1 m_2 \left(\omega_1^2 - \omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \omega^2\right)}$$

تحلیل ارتعاشات اجباری سیستم دو درجه آزادی

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \left(k_{22} - m_{22}\omega^2\right) & -k_{12} \\ -k_{21} & \left(k_{11} - m_{11}\omega^2\right) \end{bmatrix}}{m_1 m_2 \left(\omega_1^2 - \omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \omega^2\right)} \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$X_1 = \frac{\left(k_{22} - m_{22}\omega^2\right) F_1}{m_1 m_2 \left(\omega_1^2 - \omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \omega^2\right)}$$

$$X_2 = \frac{-k_{21} F_1}{m_1 m_2 \left(\omega_1^2 - \omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \omega^2\right)}$$

تحلیل ارتعاشات اجباری سیستم دو درجه آزادی

برنامه نویسی در MATLAB:

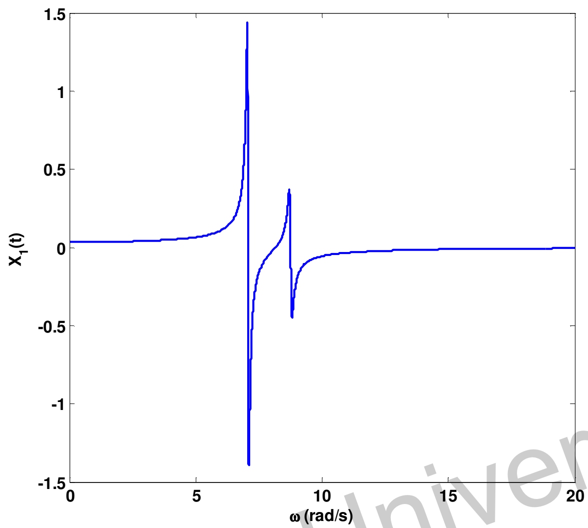
```
m11=5;
m12=0;
m21=0;
m22=3;

c11=0.5;
c12=-0.1;
c21=-0.1;
c22=0.2;

k11=300;
k12=-50;
k21=-50;
k22=200;

F10=10;
F20=0;

M=[m11 m12;m21 m22];
C=[c11 c12;c21 c22];
K=[k11 k12;k21 k22];
```

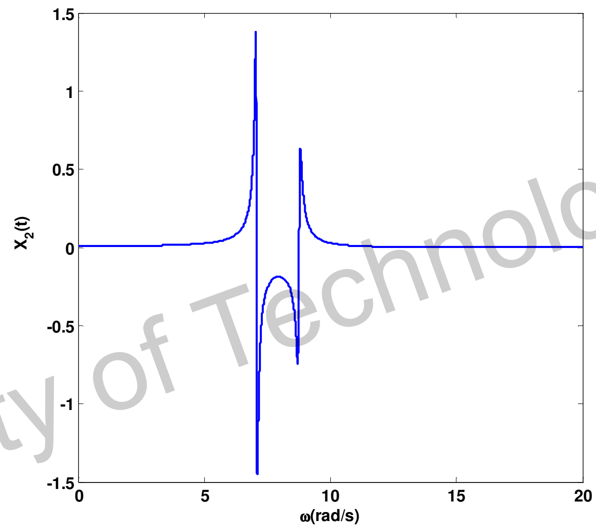
تحلیل ارتعاشات اجباری سیستم دو درجه آزادی

برنامه نویسی در MATLAB:

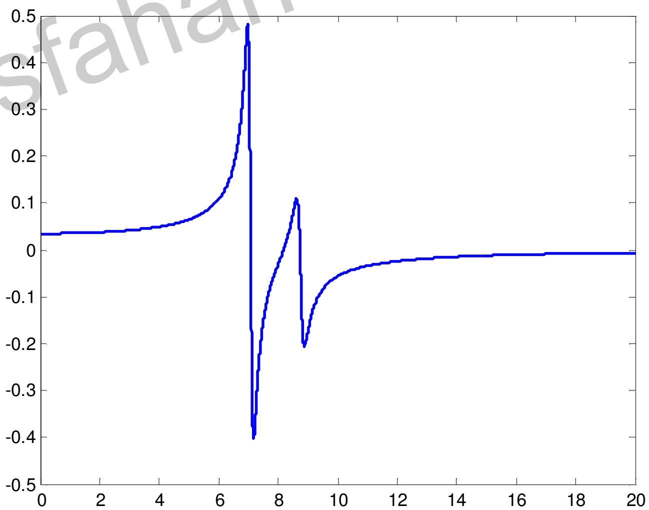
```
r=0;
for w=0:.001:20
    r=r+1;
    Z=-M*w^2+1i*w*C+K;
    H=inv(Z);
    X1(r)=H(1,1)*F10+H(1,2)*F20;
    X2(r)=H(2,1)*F10+H(2,2)*F20;
    H11(r)=H(1,1);
    H12(r)=H(1,2);
    H22(r)=H(2,2);

end
i=0:.001:20;
figure(1)
plot(i,X1,'-','linewidth',2)
figure(2)
hold on
plot(i,X2,'-','linewidth',2)

%plot(i,H11) % or H12 H22
```

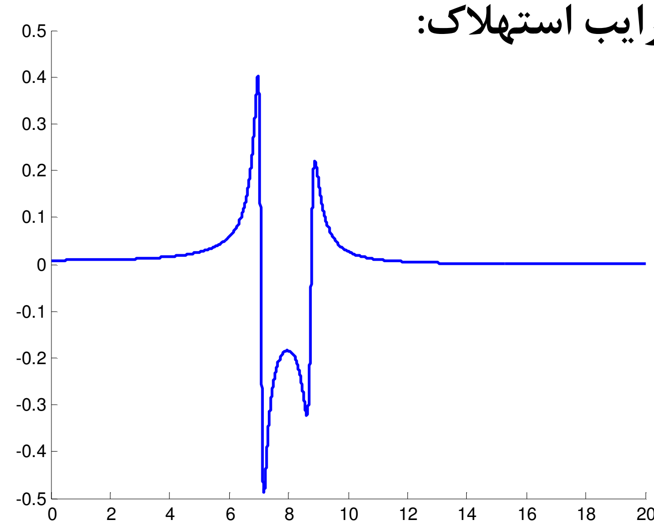
تحلیل ارتعاشات اجباری سیستم دو درجه آزادی





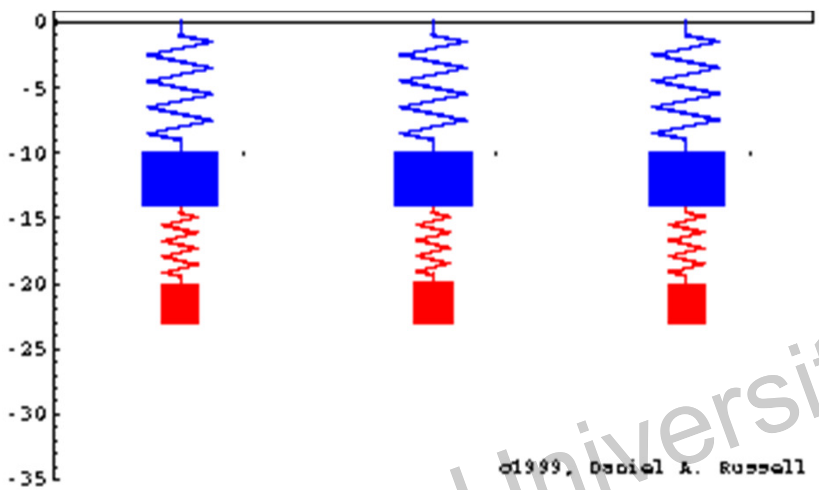
اثر افزایش ضرایب استهلاک:

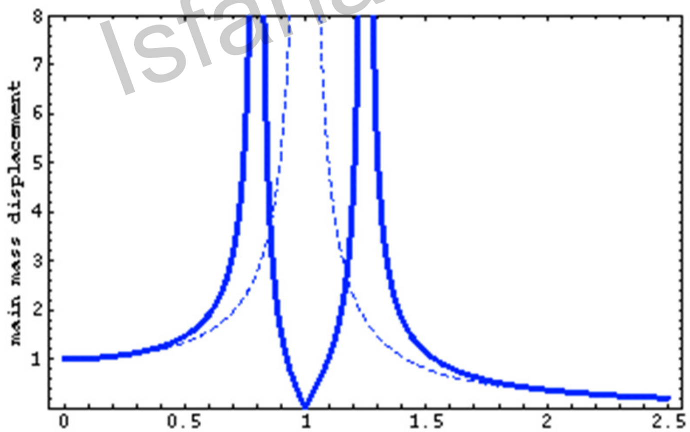


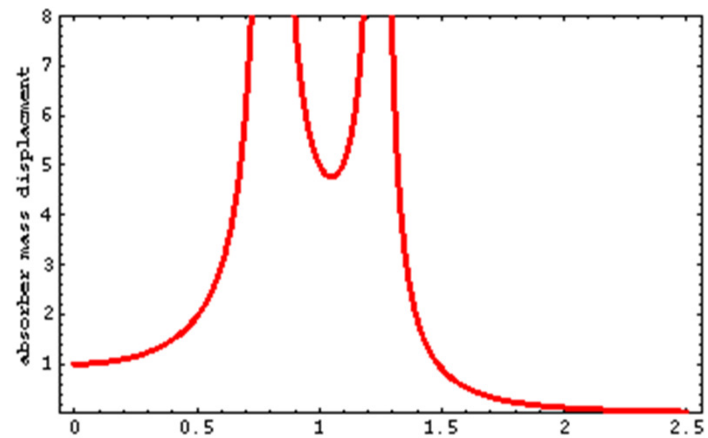


تحلیل ارتعاشات اجباری سیستم دو درجه آزادی

لرزش گیر (جاذب ارتعاشات):

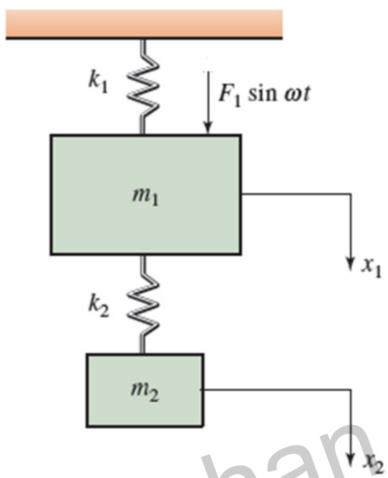






تحلیل ارتعاشات اجباری سیستم دو درجه آزادی

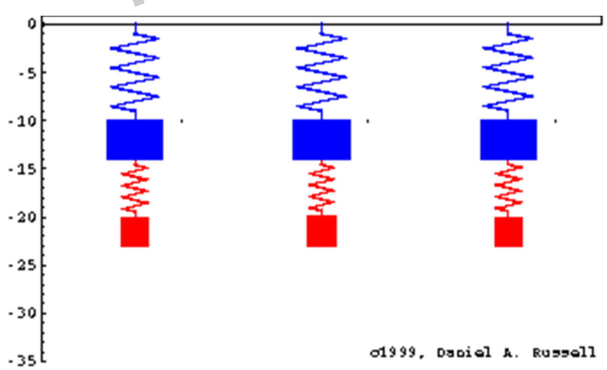
لرزش گیر (جاذب ارتعاشات):



$$x_1 = A \sin \omega t, \quad x_2 = B \sin \omega t$$

$$A = \left(\frac{F_1}{k_1}\right)\left[\frac{1 - (\omega/\omega_2)^2}{\left(1 + \mu\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right) - \mu\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}\right]$$

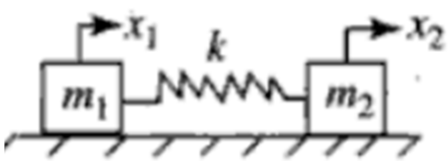
$$\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1} \qquad \omega_2 = \sqrt{k_2/m_2} \qquad \mu = m_2/m_1$$



تحت چه شرایطی جابجایی جرم 1 صفر می شود؟

سیستم های نیمه معین یا غیر مقید

معادله های حرکت سیستم روبرو را در نظر بگیرید:



$$m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$

$$m_1 m_2\omega^4 - k(m_1 + m_2)\omega^2 = 0$$

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}\ \text{rad/s}$$

سیستم دارای حرکت نوسانی نیست و به صورت صلب گونه حرکت می کند.