Mechanical Vibration

ارتعاشات مکانیکی(درس بیستم)

By: Reza Tikani
Mechanical Engineering Department
Isfahan University of Technology

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

توجه: در حالت کلی اگر المان های غیر قطری صفر باشند، می گوییم سیستم دارای کوپلینگ است.

$m_{ij} \neq 0, \quad i \neq j$ → ***Dynamic Coupling***

$c_{ij} \neq 0, \quad i \neq j$ → ***Damping Coupling (or Velocity Damping)***

$k_{ij} \neq 0, \quad i \neq j$ → ***Static Coupling***

معادلات به دست آمده در مثال قبل وابسته هستند، چون دارای کوپلینگ استاتیکی می باشند.

البته می توان نشان داد که در حالات خاصی این وابستگی از بین می رود.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -(k_1 l_1 - k_2 l_2) \\ -(k_1 l_1 - k_2 l_2) & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

توجه: نوع کوپلینگ موجود در معادلات سیستم یک خاصیت ذاتی مربوط به سیستم نیست و بستگی به مختصات انتخاب شده برای بیان معادلات حرکت دارد.

امکان انتخاب مختصاتی که با استفاده از آن معادلات حرکت غیرکوپل یا دی کوپله باشند وجود دارد. به چنین مختصاتی مختصات مبنا یا مختصات اصلی می گویند.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

مختصات مبنا یا مختصات اصلی

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{p}_1 + k_{11}p_1 = 0 \\ m_{22}\ddot{p}_2 + k_{22}p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} p_1 = A_{11}\mathrm{Sin}(\omega_1 t + \psi_1) \\ p_2 = A_{12}\mathrm{Sin}(\omega_2 t + \psi_2) \end{matrix}$$

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

توجه: رابطه پاسخ در مختصات عمومی دلخواه به صورت زیر به دست آمد:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} A_{11}\mathrm{Sin}(\omega_1 t + \psi_1) + \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} A_{12}\mathrm{Sin}(\omega_2 t + \psi_2)$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

$$\{q\} = [u]\{P\} \Rightarrow \{p\} = [u]^{-1}\{q\} \qquad u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$\{P\} = \frac{1}{u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}} \begin{bmatrix} u_{22} & -u_{12} \\ -u_{21} & u_{11} \end{bmatrix} \{q\}$$

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

مثال: مختصات اصلی سیستمی با معادلات حرکت زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} : [K] = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

$$\left|[K] - [M]\omega^2\right| = 0$$

$$m\omega^2 = k \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$m\omega^2 = 3k \rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

معادله دامنه‌ها
$$\begin{cases} \left(2k - m\omega^2\right)X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + \left(2k - m\omega^2\right)X_2 = 0 \end{cases}$$

$$u_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{2k - m\omega^2}{k} \overset{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}}{\Rightarrow} u_1 = 1$$

$$u_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-k}{2k - m\omega^2} \xrightarrow{\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}} u_2 = -1$$

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

ادامه مثال:

$$[u]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ u_1 & u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\{P\}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}p_1\\ p_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}(x_1+x_2)\\ \frac{1}{2}(x_1-x_2)\end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases}m\ddot{x}_1+2kx_1-kx_2=0\\ m\ddot{x}_2-kx_1+2kx_2=0\end{cases}$$

$$\begin{array}{l}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{array}\begin{cases}m(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)+k(x_1+x_2)=0\\ m(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2)+3k(x_1-x_2)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}m\ddot{p}_1+kp_1=0\\ m\ddot{p}_2+3kp_2=0\end{cases}$$

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

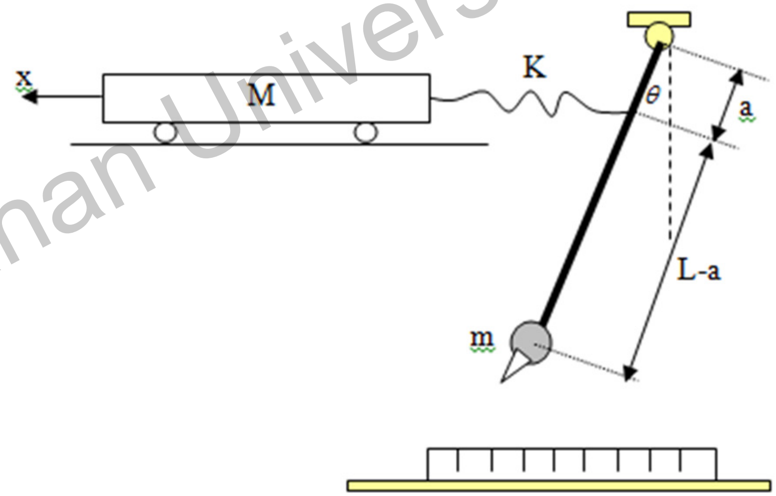
کوئیز: دستگاه زیر برای اندازه گیری و ثبت زلزله در امتداد افق به کار می رود. در اثر حرکت جرم M پاندول به حرکت در آمده و نشانگر آن مقدار دامنه ارتعاش افقی را نشان می دهد. برای ارتعاشات کوچک سیستم:

الف-معادلات حرکت سیستم را بنویسید.

ب- محاسبه فرکانس های طبیعی و مود شیپ ها

ج- محاسبه مختصات اصلی سیستم.

د- اگر فرض کنیم که در لحظه صفر جرم M با سرعت اولیه به سمت راست حرکت می کند. مطلوبست x(t) و θ(t) برای سیستم.



$M = 1kg$
$m = 0.1kg$
$K = 10N / m$
$L = 1m$
$a = 0.2$
$g = 9.81m / s^2$