بسم الله الرحمن الرحیم

Mechanical Vibration

ارتعاشات مکانیکی(درس نوزدهم)

By: Reza Tikani
Mechanical Engineering Department
Isfahan University of Technology

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

❖ پاسخ زمانی سیستم:

$$\mathbf{x}(t) = \left(ae^{-j\omega_1 t} + be^{j\omega_1 t}\right)\mathbf{u}_1 + \left(ce^{-j\omega_2 t} + de^{j\omega_2 t}\right)\mathbf{u}_2$$
$$= A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)\mathbf{u}_1 + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)\mathbf{u}_2$$

در صورتیکه شرایط اولیه به نحوی انتخاب شود که:

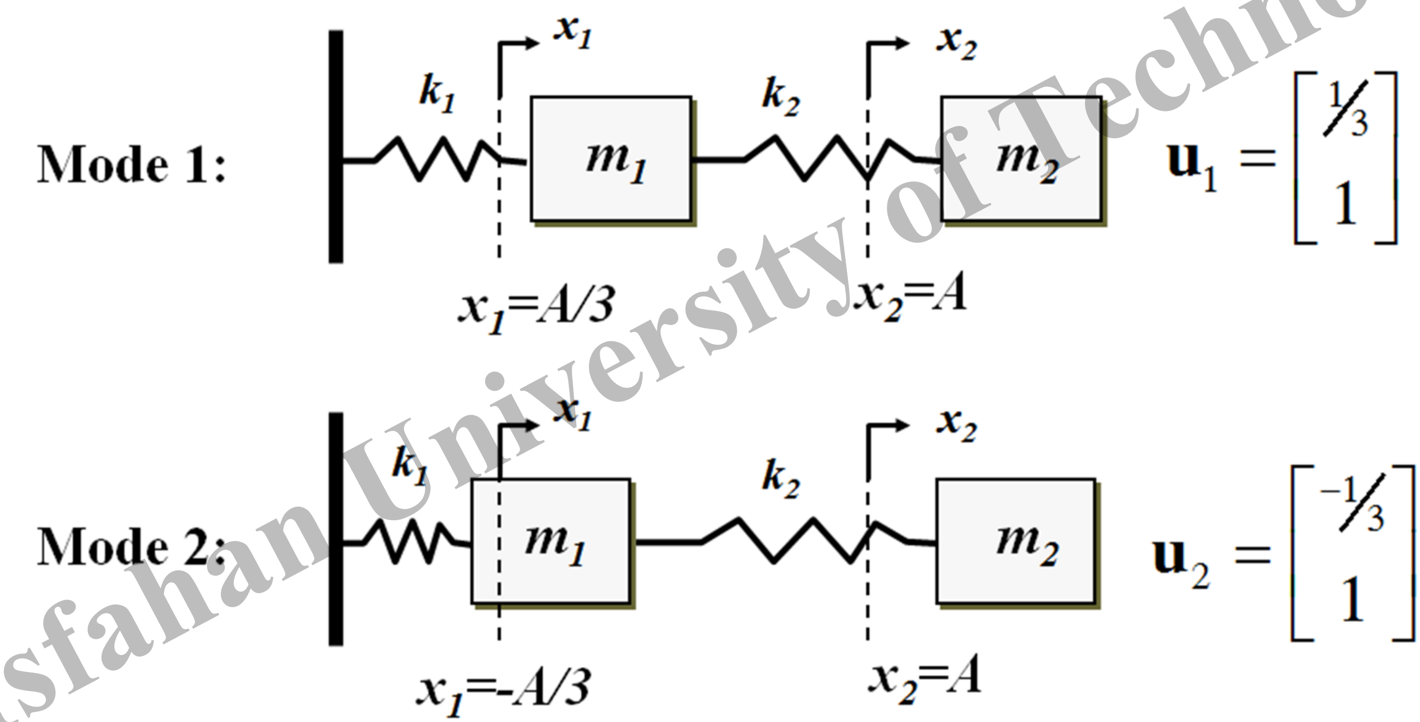
$$A_2 = \phi_1 = \phi_2 = 0$$

در اینصورت داریم:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} \sin\omega_1 t = A_1 \mathbf{u}_1 \sin\omega_1 t$$

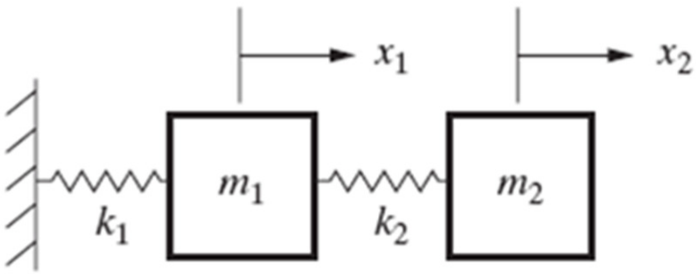
یعنی دو جرم تنها در فرکانس طبیعی اول و با دامنه جابجایی متناسب با مود شیپ اول ارتعاش می کنند.

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده



در صورتیکه شرایط اولیه اعمالی به سیستم متناظر با مود اول یا مود دوم باشد، پاسخ به طور خالص در آن مود خواهد بود.

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده



❖ تعیین ضرایب مجهول:

$$\text{consider}\,\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\text{mm},\ \dot{\mathbf{x}}(0)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{A_1}{3}\sin\left(\sqrt{2}t+\phi_1\right)-\frac{A_2}{3}\sin\left(2t+\phi_2\right)\\A_1\sin\left(\sqrt{2}t+\phi_1\right)+A_2\sin\left(2t+\phi_2\right)\end{bmatrix}$$

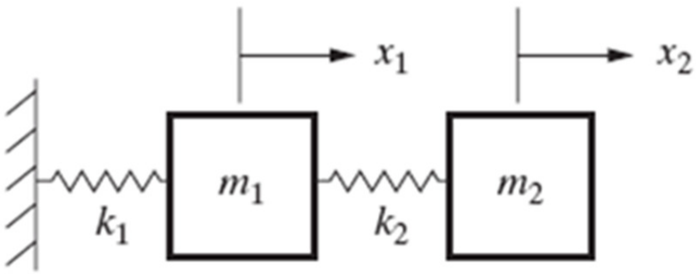
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{A_1}{3}\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}t+\phi_1\right)-\frac{A_2}{3}2\cos\left(2t+\phi_2\right)\\A_1\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}t+\phi_1\right)+A_2 2\cos\left(2t+\phi_2\right)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1\text{ mm}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{A_1}{3}\sin\left(\phi_1\right)-\frac{A_2}{3}\sin\left(\phi_2\right)\\A_1\sin\left(\phi_1\right)+A_2\sin\left(\phi_2\right)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{A_1}{3}\sqrt{2}\cos\left(\phi_1\right)-2\frac{A_2}{3}\cos\left(\phi_2\right)\\A_1\sqrt{2}\cos\left(\phi_1\right)+2A_2\cos\left(\phi_2\right)\end{bmatrix}$$

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده



- تعیین ضرایب مجهول:

$$3 = A_1 \sin(\phi_1) - A_2 \sin(\phi_2)$$

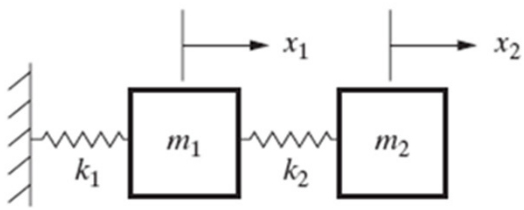
$$0 = A_1 \sin(\phi_1) + A_2 \sin(\phi_2)$$

$$0 = A_1 \sqrt{2} \cos(\phi_1) - A_2 2 \cos(\phi_2)$$

$$0 = A_1 \sqrt{2} \cos(\phi_1) + A_2 2 \cos(\phi_2)$$

$$A_1 = 1.5 \text{ mm}, A_2 = -1.5 \text{ mm}, \phi_1 = \phi_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

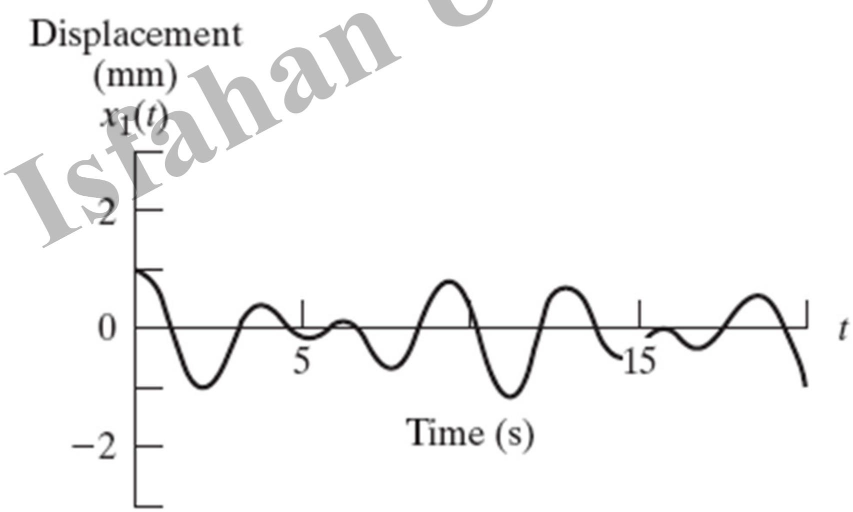
مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

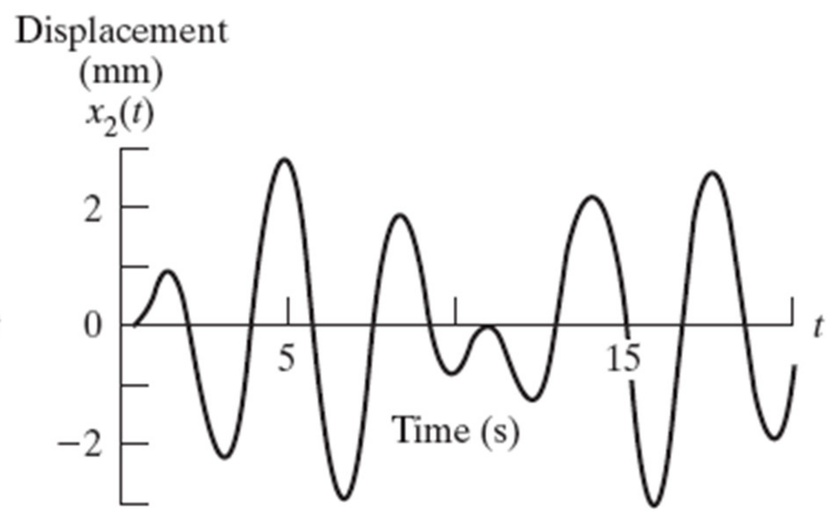


❖ پاسخ زمانی سیستم:

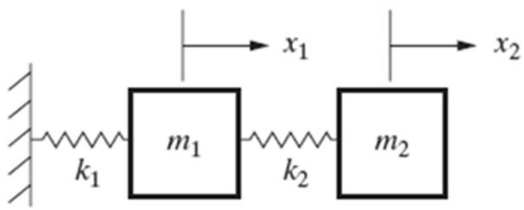
$$x_1(t) = 0.5\cos\sqrt{2}t + 0.5\cos 2t$$

$$x_2(t) = 1.5\cos\sqrt{2}t - 1.5\cos 2t$$





مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده



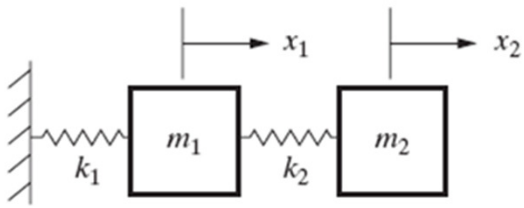
❖ پاسخ زمانی سیستم:

$$\mathbf{x}(t) = a_1\mathbf{u}_1\cos\omega_1 t + a_2\mathbf{u}_2\cos\omega_2 t$$

مود دوم میزان اثر فرکانس دوم در پاسخ را نشان می دهد.

مود اول میزان اثر فرکانس اول در پاسخ را نشان می دهد.

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

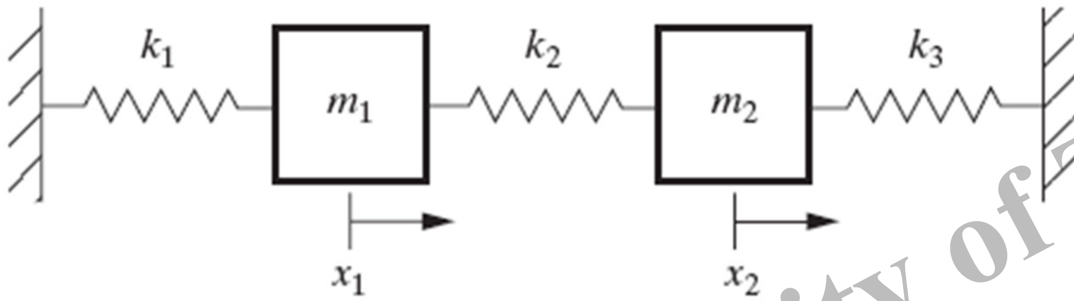


❖ توجه:

$$\omega_1 = \sqrt{2} \neq \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 1.63, \omega_2 = 2 \neq \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = 1.732$$

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

❖ مثال:



$m_1 = 1$ kg, $m_2 = 4$ kg, $k_1 = k_3 = 10$ N/m and $k_2 = 2$ N/m

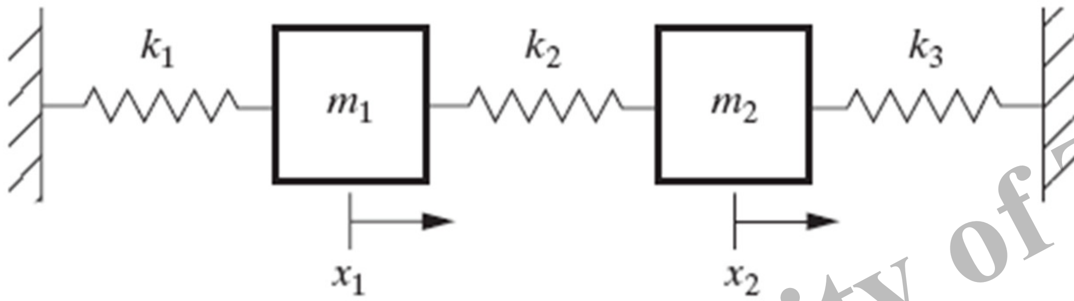
$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\ddot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}\mathbf{x} = 0$$

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

❖ مثال:



$$m_1 = 1 \text{ kg},\ m_2 = 4 \text{ kg},\ k_1 = k_3 = 10 \text{ N/m} \text{ and } k_2 = 2 \text{ N/m}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 12 \end{bmatrix}$$

❖ فرکانس های طبیعی و مود شیپها را به صورت دستی محاسبه نمایید.

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

❖ استفاده از نرم افزار MATLAB برای حل مساله مقادیر و بردارهای ویژه:

[V,D] = eig(X)

produces a diagonal matrix D of eigenvalues and a full matrix V whose columns are the corresponding eigenvectors so that ***X*V = V*D***.

[V,D] = eig(A,B)

produces a diagonal matrix D of generalized eigenvalues and a full matrix V whose columns are the corresponding eigenvectors so that ***A*V = B*V*D***.

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

❖ استفاده از نرم افزار MATLAB برای حل مساله مقادیر و بردارهای ویژه:

```
>> M=[1 0;0 4];
>> M

M =

     1     0
     0     4

>> k=[12 -2; -2 12]

k =

    12    -2
    -2    12

>> [V,D]=eig(k,M)

V =

   -0.1091   -0.9940
   -0.4970    0.0546


D =

    2.8902         0
         0   12.1098

>> sqrt(D)

ans =

    1.7001         0
         0    3.4799
```

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

❖ به دست آوردن ریشه های یک معادله با استفاده از نرم افزار MATLAB :

roots(C)

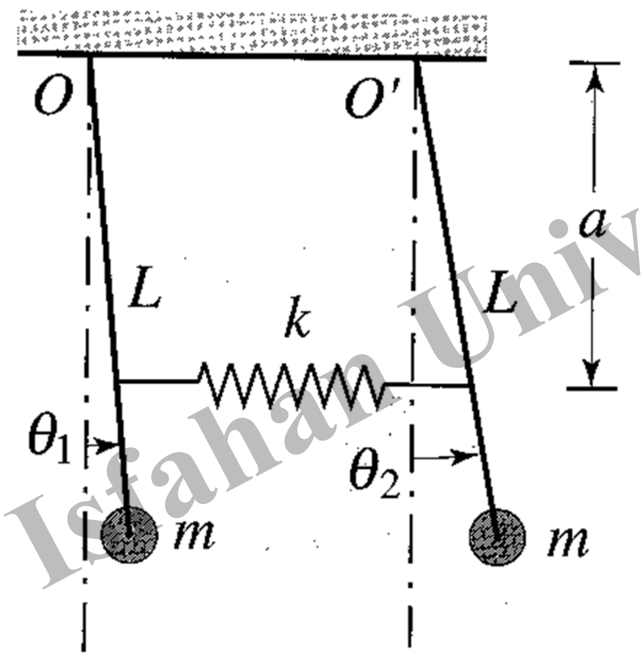
computes the roots of the polynomial whose coefficients are the elements of the vector C. If C has N+1 components, the polynomial is C(1)*X^N + ... + C(N)*X + C(N+1).

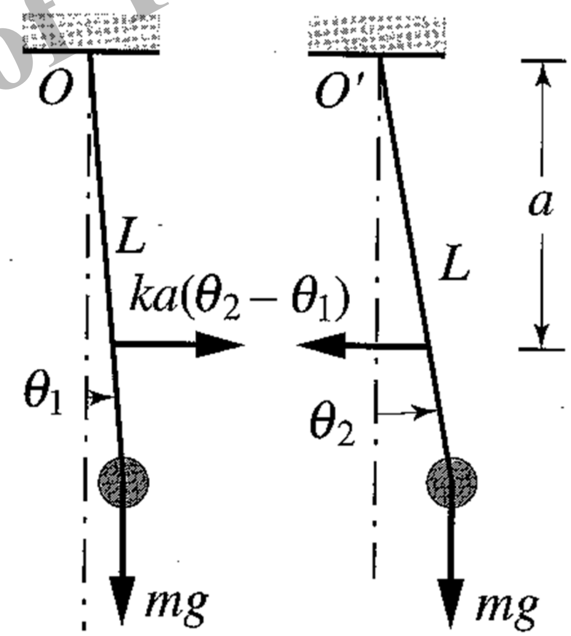
$\omega^4 - 6\omega^2 + 8 = 0$

```
>> C=[1 0 -6 0 8];
>> roots(C)

ans =

   -2.0000
   -1.4142
    2.0000
    1.4142
```

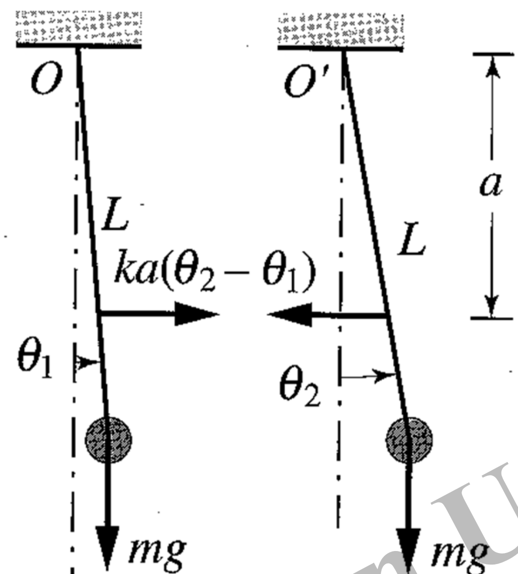
مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

❖ مثال: معادلات حرکت سیستم دو درجه آزادی روبرو را به دست آورید.





مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده



$$mL^2\ddot{\theta}_1 + mgL\theta_1 + ka^2(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

$$mL^2\ddot{\theta}_2 + mgL\theta_2 - ka^2(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

$$\begin{bmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgL + ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & mgL + ka^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

$$\begin{bmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} mgL+ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & mgL+ka^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\theta_1(t)=\Theta_1\cos(\omega t-\phi),\ \theta_2(t)=\Theta_2\cos(\omega t-\phi)$$

$$-\omega^2\begin{bmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} mgL+ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & mgL+ka^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

$$-\omega^2\begin{bmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} mgL+ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & mgL+ka^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} mgL+ka^2-\omega^2 mL^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & mgL+ka^2-\omega^2 mL^2 \end{bmatrix}$$

$$=(mgL+ka^2-\omega^2 mL^2)^2-(ka^2)^2=0$$

$$\Rightarrow \quad mgL+ka^2-\omega^2 mL^2=\pm ka^2$$

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

$$mgL + ka^2 - \omega^2 mL^2 = \pm ka^2$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L} + 2\frac{k}{m}\frac{a^2}{L^2}}$$

جایگذاری هر فرکانس در معادله و استخراج مود شیپ ها:

$$-\omega_i^2 \begin{bmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} mgL + ka^2 & -ka^2 \\ -ka & mgL + ka^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\Theta_{21}}{\Theta_{11}} = 1,\ \frac{\Theta_{22}}{\Theta_{12}} = -1$$

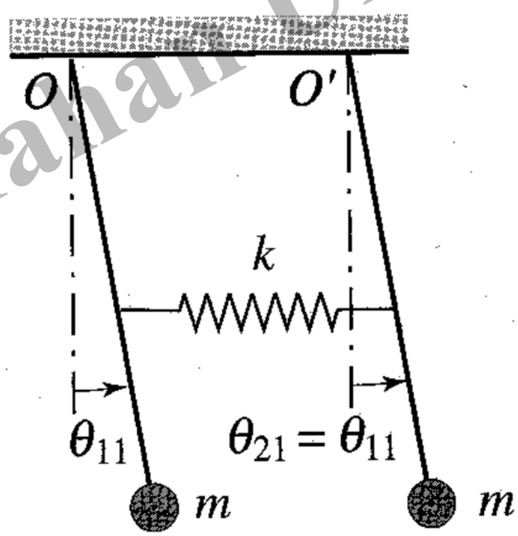
مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = C_1\cos(\omega_1 t-\phi_1)\begin{bmatrix} \Theta_{11} \\ \Theta_{21} \end{bmatrix} + C_2\cos(\omega_2 t-\phi_2)\begin{bmatrix} \Theta_{12} \\ \Theta_{22} \end{bmatrix}$$

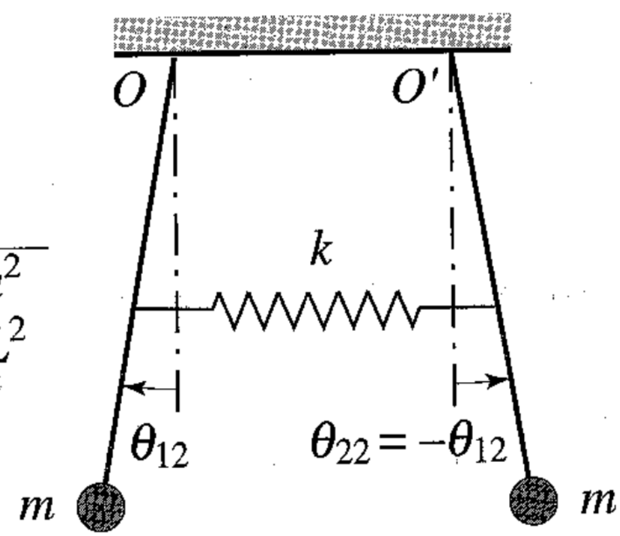
$$\theta_1(t) = C_1\cos(\omega_1 t-\phi_1) + C_2\cos(\omega_2 t-\phi_2)$$

$$\theta_2(t) = C_1\cos(\omega_1 t-\phi_1) - C_2\cos(\omega_2 t-\phi_2)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

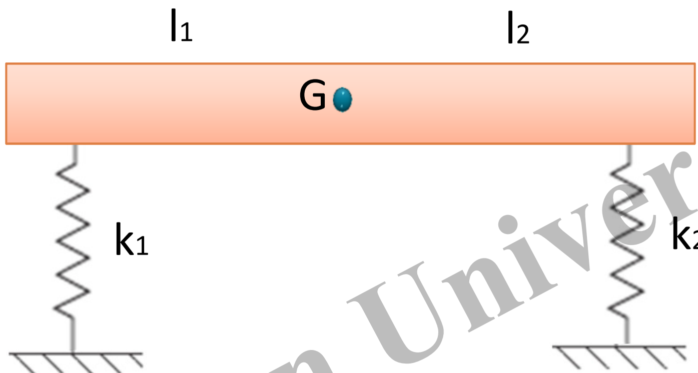


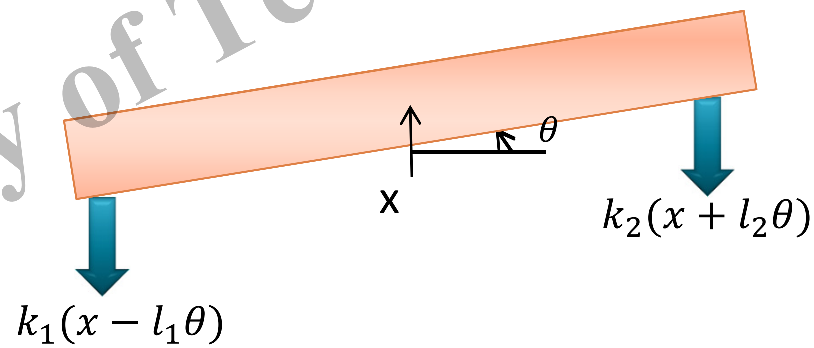
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L} + 2\frac{ka^2}{mL^2}}$$



مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

❖ مثال: معادلات حرکت سیستم دو درجه آزادی روبرو را به دست آورید.





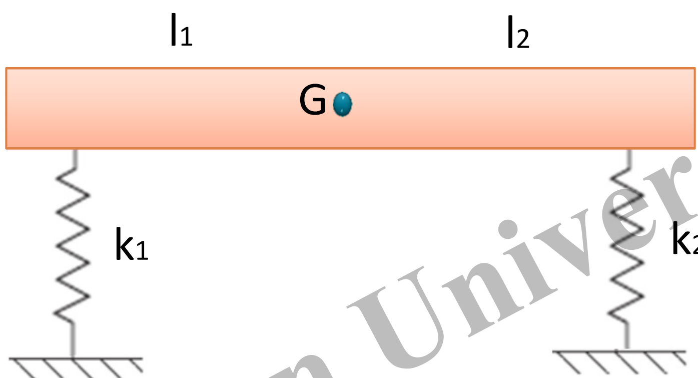
$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \qquad \Sigma M_G = J\ddot{\theta}$$

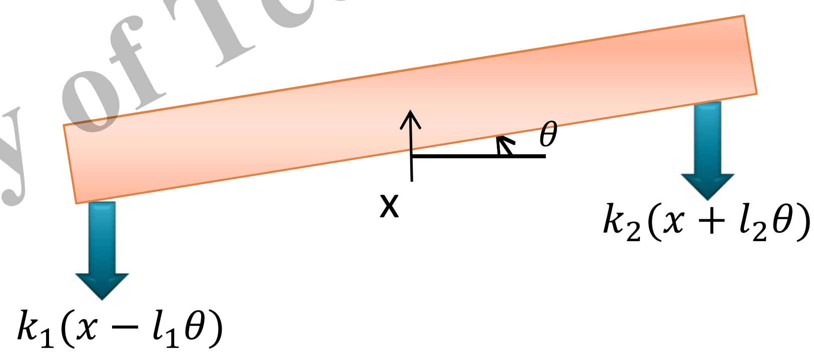
$$\begin{cases} -k_1(x - l_1\theta) - k_2(x + l_2\theta) = m\ddot{x} \\ k_1(x - l_1\theta)l_1 - k_2(x + l_2\theta)l_2 = J_c\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x - (k_1 l_1 - k_2 l_2)\theta = 0 \\ J_c\ddot{\theta} - (k_1 l_1 - k_2 l_2)x + (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)\theta = 0 \end{cases}$$

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

❖ مثال: معادلات حرکت سیستم دو درجه آزادی روبرو را به دست آورید.





$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -(k_1l_1-k_2l_2) \\ -(k_1l_1-k_2l_2) & k_1l_1^2+k_2l_2^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

توجه: در حالت کلی اگر المان های غیر قطری صفر باشند، می گوییم سیستم دارای کوپلینگ است.

$m_{ij} \neq 0, \quad i \neq j$ → ***Dynamic Coupling***

$c_{ij} \neq 0, \quad i \neq j$ → ***Damping Coupling (or Velocity Damping)***

$k_{ij} \neq 0, \quad i \neq j$ → ***Static Coupling***

معادلات به دست آمده در مثال قبل وابسته هستند، چون دارای کوپلینگ استاتیکی می باشند.

البته می توان نشان داد که در حالات خاصی این وابستگی از بین می رود.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -(k_1 l_1 - k_2 l_2) \\ -(k_1 l_1 - k_2 l_2) & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

توجه: نوع کوپلینگ موجود در معادلات سیستم یک خاصیت ذاتی مربوط به سیستم نیست و بستگی به مختصات انتخاب شده برای بیان معادلات حرکت دارد.

امکان انتخاب مختصاتی که با استفاده از آن معادلات حرکت غیرکوپل یا دی کوپله باشند وجود دارد. به چنین مختصاتی مختصات مبنا یا مختصات اصلی می گویند.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

مختصات مبنا یا مختصات اصلی

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{p}_1 + k_{11}p_1 = 0 \\ m_{22}\ddot{p}_2 + k_{22}p_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} p_1 &= A_{11}\mathrm{Sin}(\omega_1 t + \psi_1) \\ p_2 &= A_{12}\mathrm{Sin}(\omega_2 t + \psi_2) \end{aligned}$$