بسم الله الرحمن الرحیم

# Mechanical Vibration

## ارتعاشات مکانیکی(درس هجدهم)

**By: Reza Tikani**
**Mechanical Engineering Department**
**Isfahan University of Technology**

# مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

فرم ماتریسی معادلات حرکت:

$$m_1\ddot{x}_1(t)+(k_1+k_2)x_1(t)-k_2x_2(t)=0$$
$$m_2\ddot{x}_2(t)-k_2x_1(t)+k_2x_2(t)=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad M\ddot{\mathbf{x}}+K\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},\quad \dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix},\quad \ddot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix},\qquad K=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

# مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

حل معادلات:

در سیستم های یک درجه آزادی با فرض پاسخ اسکالر به صورت $ae^{\lambda t}$ مساله حل می شود. در اینجا نیز به طور مشابه از برداری به شکل زیر استفاده می شود:

$$\text{Let } \mathbf{x}(t) = \mathbf{u}e^{j\omega t}$$

$$j = \sqrt{-1}, \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \quad \omega, \mathbf{u} \text{ unknown}$$

$$\Rightarrow \left(-\omega^2 M + K\right)\mathbf{u}e^{j\omega t} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \left(-\omega^2 M + K\right)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

این معادله دارای سه مجهول است. یک بردار با دو مولفه و یک اسکالر.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$\omega$

# مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

حل معادلات:

$$\left(-\omega^2 M + K\right)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

✓ در صورتی که معکوس ماتریس $\left(-\omega^2 M + K\right)$ وجود داشته باشد، در این صورت داریم: $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

عدم وجود حرکت؛ معادل تعادل استاتیکی سیستم

✓ در حالتی که حرکت رخ می دهد:

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \left(-\omega^2 M + K\right)^{-1}$$ وجود ندارد

$$\text{or} \quad \det\left(-\omega^2 M + K\right) = \mathbf{0}$$

## مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

حل معادلات:

$$\left(-\omega^2 M + K\right)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

✓ در صورتی که معکوس ماتریس $\left(-\omega^2 M + K\right)$ وجود داشته باشد، در این صورت داریم: $u = 0$.

عدم وجود حرکت؛ معادل تعادل استاتیکی سیستم

✓ در حالتی که حرکت رخ می دهد:

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \left(-\omega^2 M + K\right)^{-1}$$ وجود ندارد

از این معادله مجهول $\omega$ به دست می آید.

$$\text{or} \quad \det\left(-\omega^2 M + K\right) = \mathbf{0}$$

معادله مشخصه سیستم

# مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

حل معادلات:

$$\left(-\omega^2 M + K\right)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\det\left(-\omega^2 M + K\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\det\begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2)\omega^2 + k_1 k_2 = 0$$

$$\omega_1^2 \quad \text{and} \quad \omega_2^2 \Rightarrow \pm\omega_1 \quad \text{and} \quad \pm\omega_2$$

# مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

حل معادلات:

$$\left(-\omega^2 M + K\right)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$(-\omega_1^2 M + K)\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$$

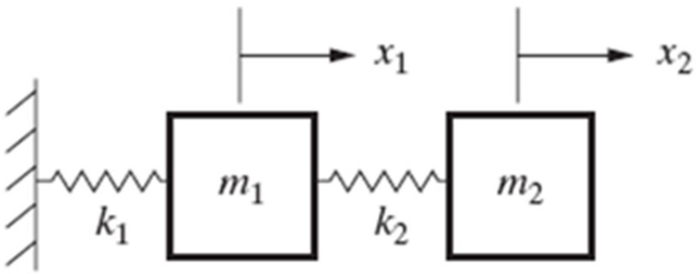
$$(-\omega_2^2 M + K)\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

هریک از دو رابطه ماتریسی فوق نشان دهنده دو معادله با دو مجهول است، اما از آنجا که ماتریس ضرب شونده دارای دترمینان صفر است، هر کدام از این رابطه های ماتریسی به یک معادله مستقل تبدیل می شوند.

این موضوع را با یک مثال عددی نشان می دهیم.

# مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

مثال:




با نوشتن معادلات حرکت و استخراج معادله مشخصه به معادله زیر می رسیم:

***m*₁=9 kg**

$m_1$=9 kg
$m_2$=1kg
$k_1$=24 N/m
$k_2$=3 N/m

$\omega^4-6\omega^2+8=(\omega^2-2)(\omega^2-4)=0 \Rightarrow \omega^2 = 2 \text{ and } \omega^2 = 4$

$$\omega_{1,3} = \pm\sqrt{2}\ \text{rad/s}, \quad \omega_{2,4} = \pm\ 2\ \text{rad/s}$$

# مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

مثال:

$\omega^4$-6$\omega^2$+8=($\omega^2$-2)($\omega^2$-4)=0 ⟹ $\omega^2$ = 2 and $\omega^2$ =4

$$\omega_{1,3} = \pm\sqrt{2} \text{ rad/s}, \quad \omega_{2,4} = \pm\, 2 \text{ rad/s}$$

$$\text{For } \omega_1^2 = 2, \text{ denote } \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} \text{ then we have}$$

$$(-\omega_1^2 M + K)\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 27-9(2) & -3 \\ -3 & 3-(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$9u_{11} - 3u_{12} = 0 \quad \text{and} \quad -3u_{11} + u_{12} = 0$$

» توجه: این دو معادله از هم مستقل نیستند.

$$\frac{u_{11}}{u_{12}} = \frac{1}{3} \Rightarrow u_{11} = \frac{1}{3} u_{12}$$

مثال:

$$\frac{u_{11}}{u_{12}} = \frac{1}{3} \Rightarrow u_{11} = \frac{1}{3} u_{12}$$

پس این رابطه تنها جهت بردار را برای ما مشخص می سازد و اندازه آن اختیاری است، زیرا:

$$(-\omega_1^2 M + K) a \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \Leftrightarrow (-\omega_1^2 M + K) \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$$

For $\omega_2^2 = 4$, let $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix}$ then we have

$$(-\omega_1^2 M + K)\mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 27 - 9(4) & -3 \\ -3 & 3 - (4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$-9u_{21} - 3u_{22} = 0 \quad \text{or} \quad u_{21} = -\frac{1}{3} u_{22}$$

# مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

- برای اندازه بردار چه کنیم؟

- چند روش وجود دارد، ما در اینجا یکی از مولفه ها را مقدار ثابت یک در نظر می گیریم.

$$u_{12} = 1 \quad \Rightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_{22} = 1 \quad \Rightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

- ❖ بردارهای ویژه، شکل مودها یا مودشیپ ها:

$$\omega_{1,3} = \pm\sqrt{2}, \text{ has mode shape } \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_{2,4} = \pm\ 2, \text{ has mode shape } \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# مدل سیستم دو درجه آزادی بدون مستهلک کننده

❖ پاسخ زمانی سیستم:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}_1 e^{-j\omega_1 t},\ \mathbf{u}_1 e^{j\omega_1 t},\ \mathbf{u}_2 e^{-j\omega_2 t}, \mathbf{u}_2 e^{j\omega_2 t} \Rightarrow$$

با توجه به خطی بودن سیستم داریم:

$$\mathbf{x}(t) = a\mathbf{u}_1 e^{-j\omega_1 t} + b\mathbf{u}_1 e^{j\omega_1 t} + c\mathbf{u}_2 e^{-j\omega_2 t} + d\mathbf{u}_2 e^{j\omega_2 t}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}(t) = \left(ae^{-j\omega_1 t} + be^{j\omega_1 t}\right)\mathbf{u}_1 + \left(ce^{-j\omega_2 t} + de^{j\omega_2 t}\right)\mathbf{u}_2$$

$$= \boxed{A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)\mathbf{u}_1 + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)\mathbf{u}_2}$$

هریک از دو جرم در دو فرکاس طبیعی نوسان می کنند.