بسم الله الرحمن الرحیم

Mechanical Vibration

ارتعاشات مکانیکی(درس شانزدهم)

By: Reza Tikani
Mechanical Engineering Department
Isfahan University of Technology

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی نامتناوب

اگر نیروی تحریک نیروی نامتناوب باشد، برای تعیین پاسخ سیستم می توان از یکی از روش های زیر استفاده نمود:

1. نمایش نیروی تحریک توسط انتگرال فوریه
2. استفاده از انتگرال کانالوشن
3. استفاده از تبدیل لاپلاس
4. تقریب زدن نیروی تحریک و کاربرد یک روش عددی
5. انتگرالگیری عددی از معادله های حرکت

✓ یادآوری:

Linear Superposition

If x_1, x_2 are solutions of a linear homogeneous equation, then

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 \text{ is also a solution.}$$

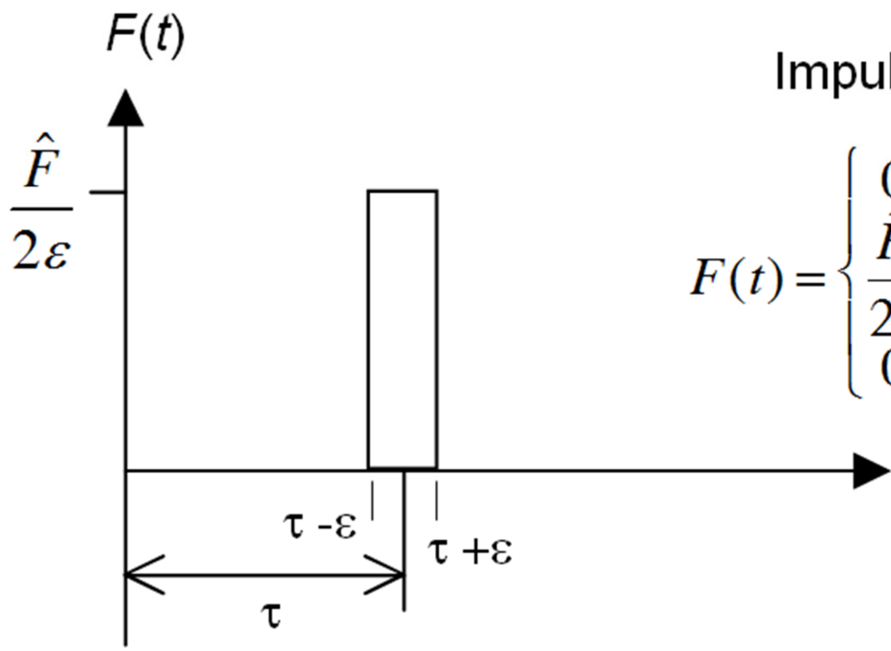
If x_1 is the particular sol of $\ddot{x} + \omega_n^2 x = f_1$

and x_2 the particular sol of $\ddot{x} + \omega_n^2 x = f_2$

$$\Rightarrow a x_1 + b x_2 \text{ solves } \ddot{x} + \omega_n^2 x = a f_1 + b f_2$$

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی نامتناوب

نیروی ضربه: نیروی بزرگی که در مدت زمان کوتاهی اعمال می شود.



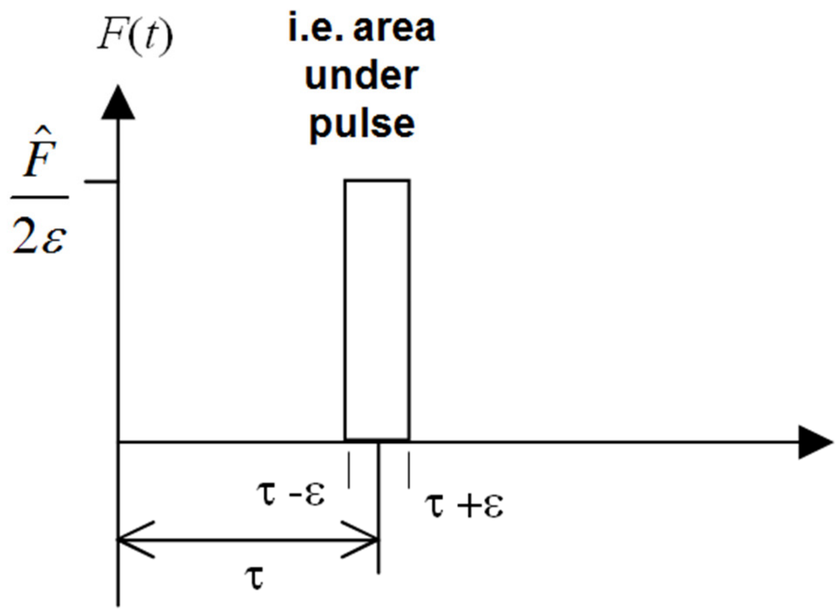
Impulse excitation

$$F(t)=\begin{cases} 0 & t<\tau-\varepsilon \\ \dfrac{\hat{F}}{2\varepsilon} & \tau-\varepsilon<t<\tau+\varepsilon \\ 0 & t>\tau+\varepsilon \end{cases}$$

ε : عدد مثبت کوچک

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی نامتناوب

اندازه ضربه:



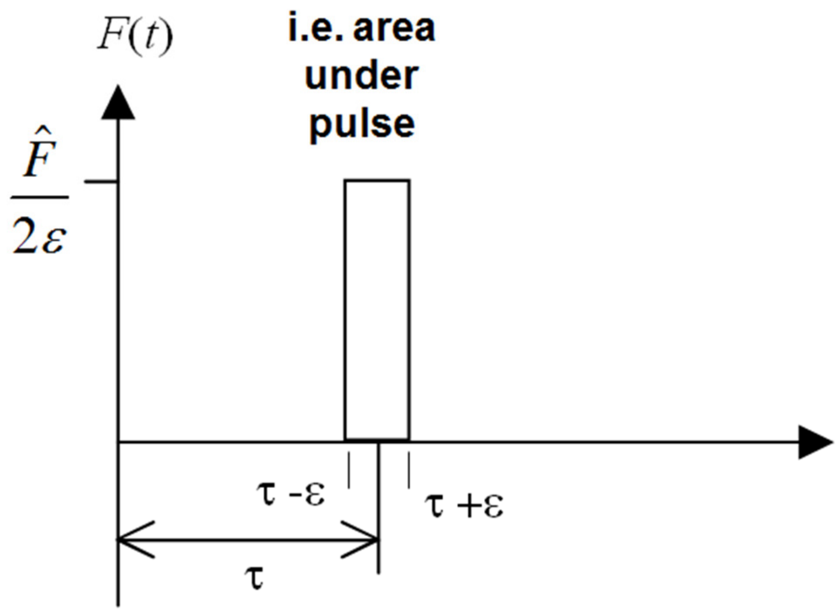
اندازه ضربه $= \int F(t)dt = F\Delta t$

$$I(\varepsilon) = \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} F(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt \ \mathrm{N \cdot s}$$

$$= \frac{\hat{F}}{2\varepsilon} 2\varepsilon = \hat{F}$$

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی نامتناوب

اندازه ضربه:



$$\text{اندازه ضربه} = \int F(t)dt = F\Delta t$$

$$I(\varepsilon) = \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} F(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt \ \mathrm{N \cdot s}$$

$$= \frac{\hat{F}}{2\varepsilon} 2\varepsilon = \hat{F}$$

ضربه واحد: If $\hat{F} = 1$, this is the Dirac Delta $\delta(\mathrm{t})$

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی نامتناوب

اثر ضربه بر یک سیستم جرم و فنر و دمپر معادل اعمال یک سرعت اولیه به سیستم است. این واقعیت با استفاده از رابطه ضربه-تکانه مشخص می شود.

لحظه بعد از برخورد

لحظه قبل از برخورد

$$\overbrace{F\Delta t = \Delta mv}^{\text{impulse=momentum change}} \qquad = m[v(t_0^+) - v(t_0^-)]$$

$$\hat{F} = mv_0 \Rightarrow v_0 = \frac{\hat{F}}{m} = \frac{F\Delta t}{m}$$

بنابراین پاسخ یک سیستم به ورودی ضربه در حالت شرایط اولیه صفر معادل پاسخ ارتعاشات آزاد سیستم است وقتی شرایط اولیه به صورت $x_0=0$ and $v_0 = F\Delta t/m$ باشد.

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی نامتناوب

یادآوری:
پاسخ ارتعاشات آزاد سیستم یک درجه آزادی:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad x(0) = x_0 \qquad \dot{x}(0) = v_0$$

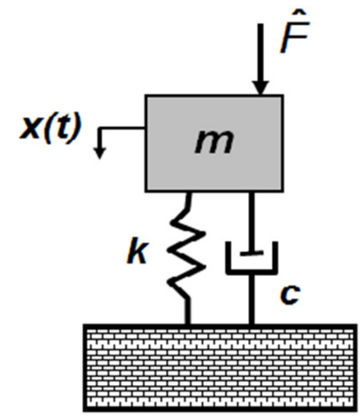
در حالت زیربحرانی:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[\left(\frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\right)\sin\omega_d t + x_0\cos\omega_d t\right]$$

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی نامتناوب

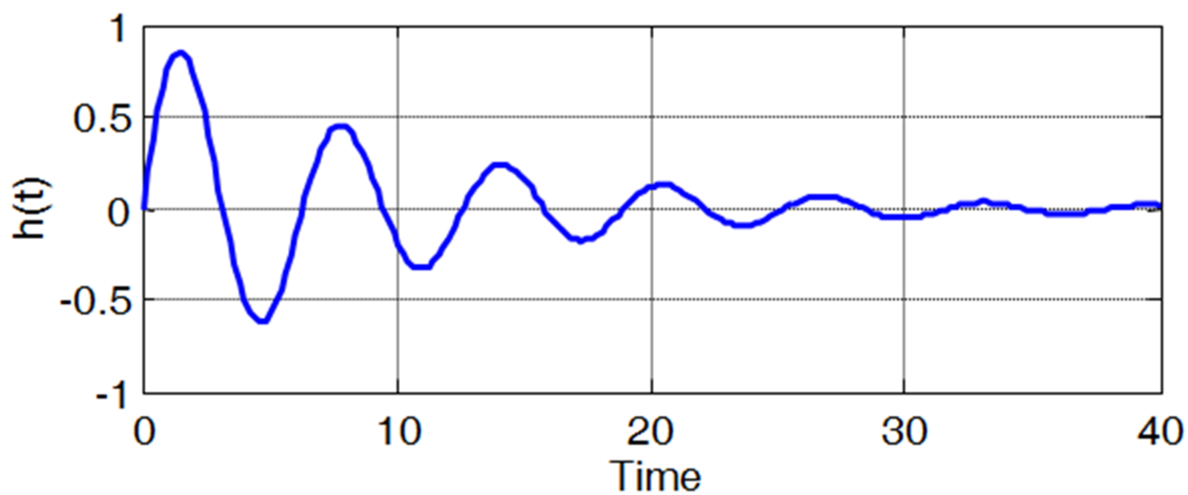
پاسخ سیستم یک درجه آزادی به ضربه $\hat{F}$:

$$x(t)=\frac{\hat{F}e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d}\sin\omega_d t$$



$$x(t)=\hat{F}h(t),\ \text{where}\ \underbrace{h(t)=\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d}\sin\omega_d t}_{\delta(t)}$$

$\delta(t)$ تابع پاسخ به ضربه واحد

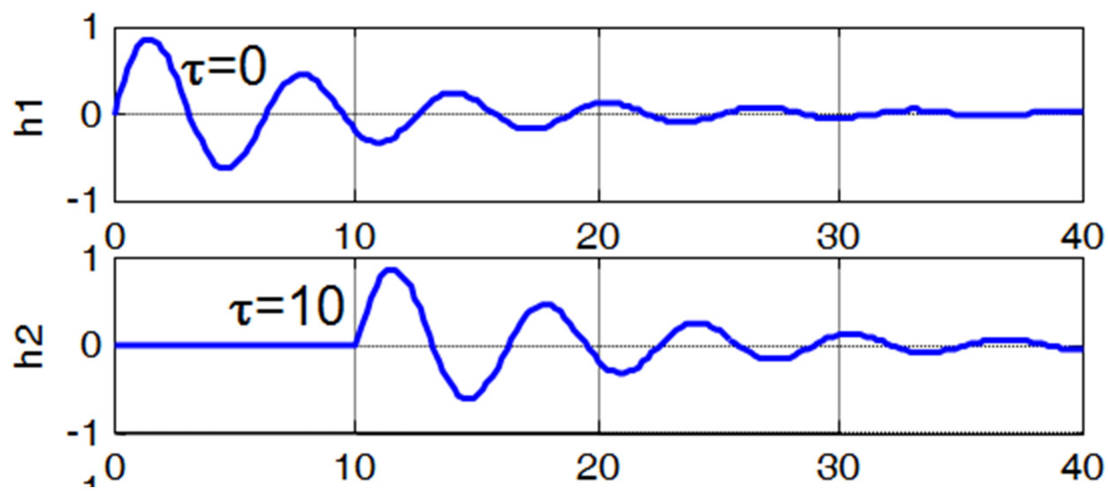


پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی نامتناوب

در صورتیکه ضربه در زمانی غیر از **t=0** به سیستم اعمال شود، داریم:

$$\delta(t-\tau) \longrightarrow h(t-\tau)$$

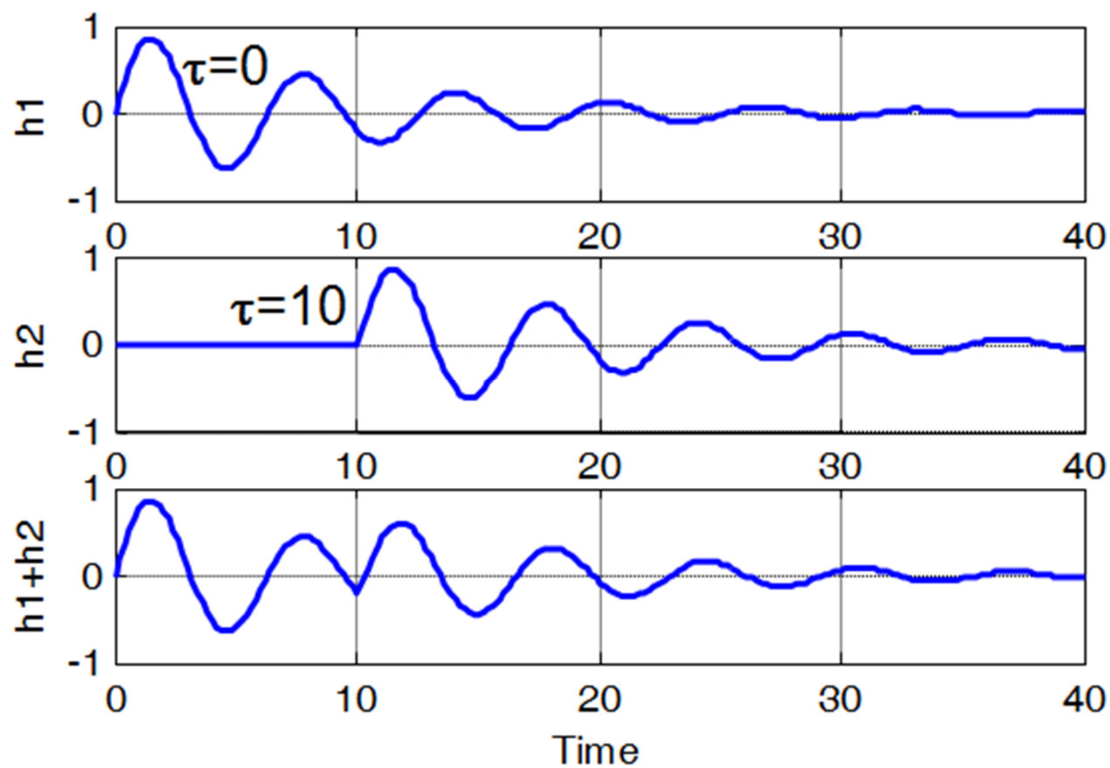
$$h(t-\tau)=\begin{cases} 0 & t<\tau \\ \dfrac{e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}}{m\omega_d}\sin\omega_d(t-\tau) & t>\tau \end{cases}$$



توجه به رابطه در حالت بدون مستهلک کننده

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی نامتناوب

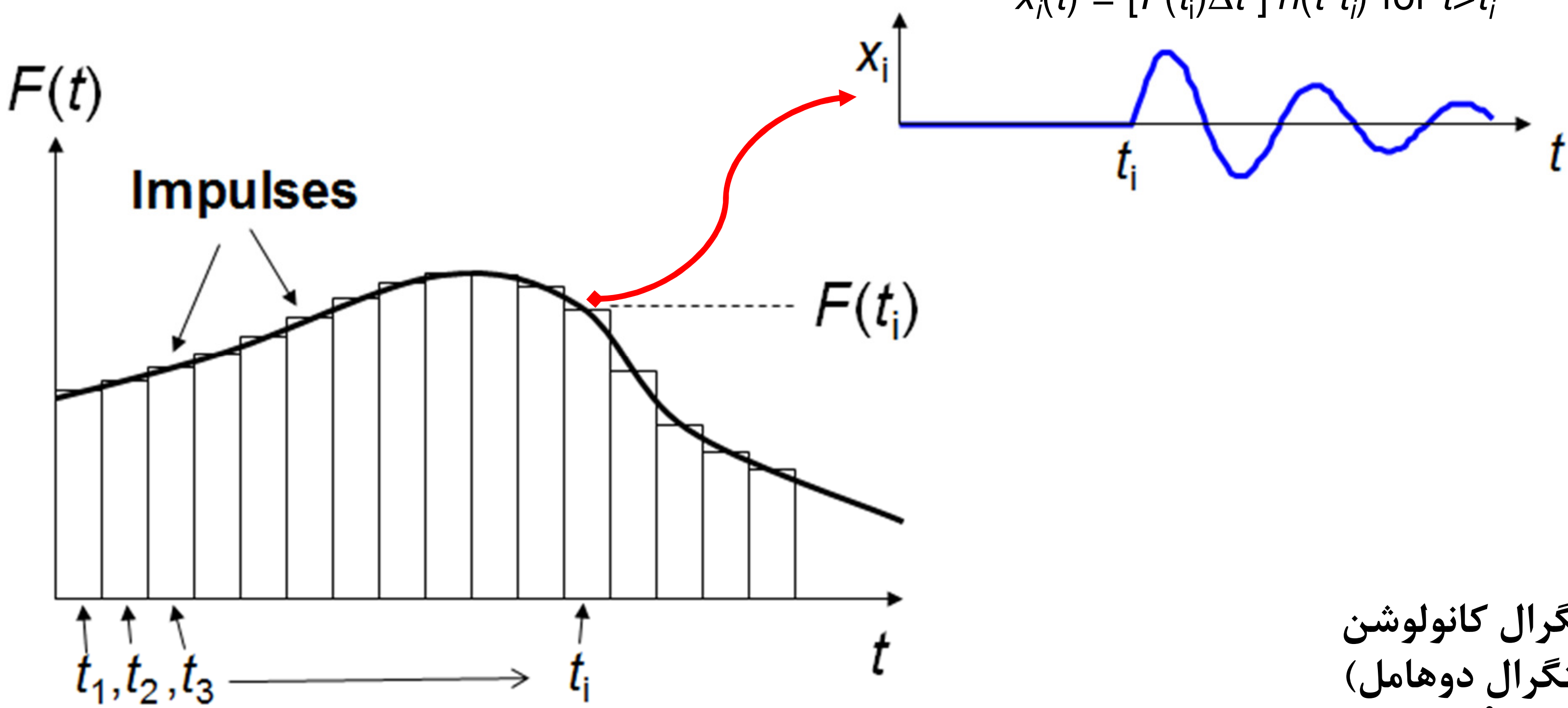
اعمال دو ضربه در دو زمان مختلف به سیستم:



پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی نامتناوب

پاسخ به نیروی دلخواه:

$x_i(t) = [F(t_i)\Delta t\,]\cdot h(t-t_i)$ for $t > t_i$



انتگرال کانولوشن
(انتگرال دوهامل)

$$x(t_I) = \sum_{i=1}^{I} [F(t_i)\Delta t]h(t-t_i) \xrightarrow{\Delta t \to 0,\ t_i \to \tau} x(t) = \int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی نامتناوب

شکل دیگر انتگرال کانولوشن:

$$\alpha = t - \tau$$

$$x(t) = \int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_t^0 F(t-\alpha)h(\alpha)(-d\alpha)$$

$$= \int_0^t F(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی نامتناوب

$$h(t-\tau)=\begin{cases} 0 & t<\tau \\ \dfrac{e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}}{m\omega_d}\sin\omega_d(t-\tau) & t>\tau \end{cases}$$

$$x(t)=\int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_0^t F(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

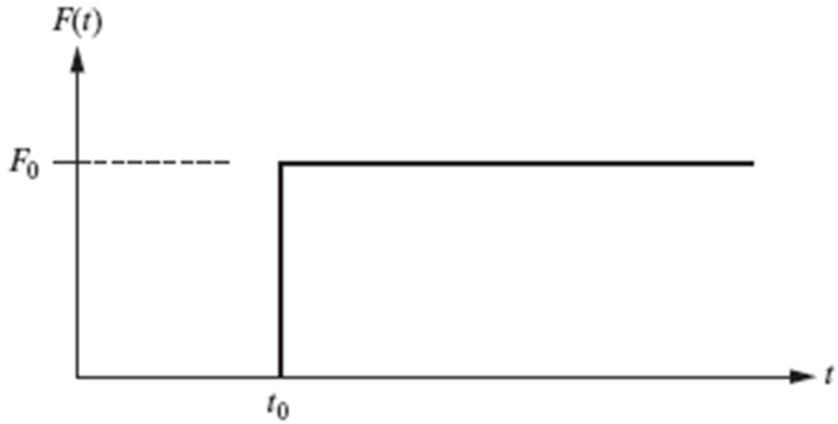
پاسخ سیستم زیربحرانی به نیروی انتگرال پذیر از یکی از دو رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$x(t)=\frac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\int_0^t\left[F(\tau)e^{\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d(t-\tau)\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(t-\tau)e^{-\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d\tau\, d\tau$$

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی نامتناوب

مثال: پاسخ به تابع پله واحد



$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\begin{cases}0 & 0<t<t_0\\ F_0 & t_0\le t\end{cases}$$

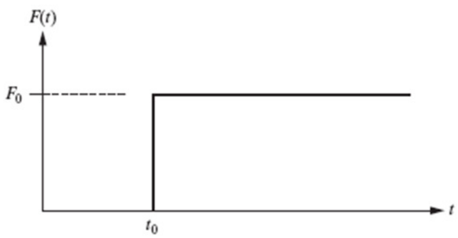
$$x_0=0,\quad v_0=0,\quad 0<\zeta<1$$

$$x(t)=\frac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\int_0^{t_0}(0)e^{\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau+\frac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\int_{t_0}^{t}F_0e^{\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{F_0}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\int_{t_0}^{t}e^{\zeta\omega_n\tau}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau$$

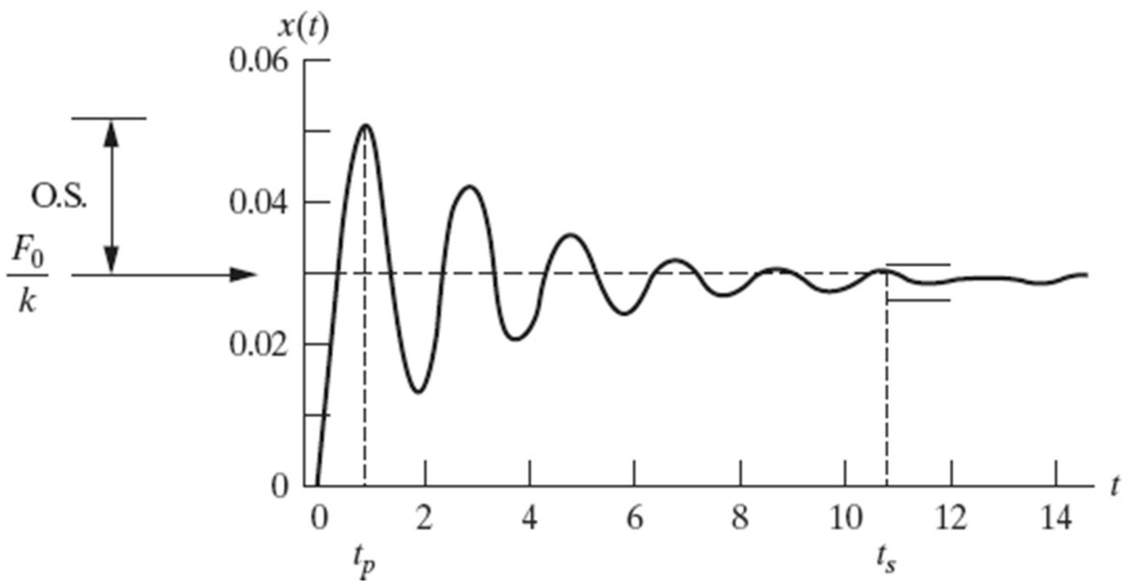
پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی نامتناوب

مثال: پاسخ به تابع پله واحد



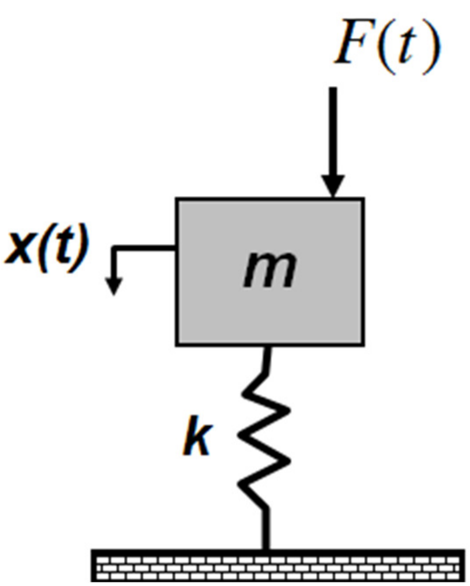
$$x(t)=\frac{F_0}{k}-\frac{F_0}{k\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}\cos\left(\omega_d(t-t_0)-\theta\right),\quad t\ge t_0$$

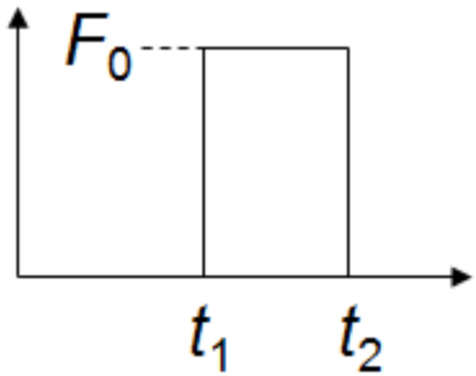
$$\theta=\tan^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$



پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی نامتناوب

مثال: پاسخ سیستم یک درجه آزادی بدون کننده به نیروی نشان داده شده:





$$h(t)=\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t$$

$$x_h=\frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t+x_0\cos\omega_n t,\quad t<t_1$$

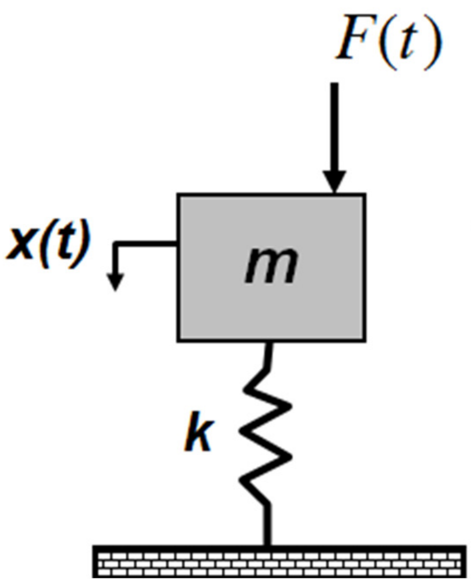
$$x_{1\to 2}=\int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau,\quad t_1<t<t_2$$

$$=\int_0^{t_1} F(\tau)h(t-\tau)d\tau+\int_{t_1}^{t} F(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

صفر

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی نامتناوب

مثال: پاسخ سیستم یک درجه آزادی بدون مستهلک کننده به نیروی نشان داده شده:



$$x_{1\to 2} = \int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau, \;\; t_1 < t < t_2$$

$$= \int_0^{t_1} F(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{t_1}^{t} F(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

صفر

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t$$

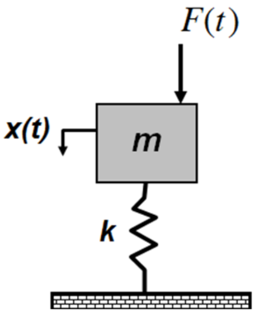
$$x_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t} F_0 \frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_n}\left\{ \frac{(-1)(-1)}{\omega_n}\cos\omega_n(t-\tau)\Big|_{t_1}^{t} \right\}$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_n^2}[1-\cos\omega_n(t-t_1)] \qquad \text{For } t_1 < t < t_2$$

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی نامتناوب

مثال: پاسخ سیستم یک درجه آزادی بدون مستهلک کننده به نیروی نشان داده شده:

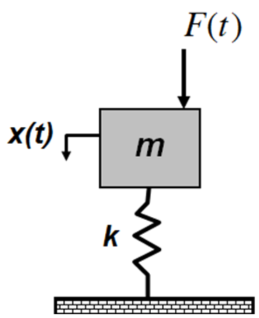


$$x_{2\rightarrow} = \int_0^{t_1} \cancelto{0}{F(\tau)} h(t-\tau)d\tau + \int_{t_1}^{t_2} F(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{t_2}^{t} \cancelto{0}{F(\tau)} h(t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_n}\left\{ \frac{1}{\omega_n}\cos\omega_n(t-\tau)\Big|_{t_1}^{t_2} \right\}$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_n^2}[\cos\omega_n(t-t_2) - \cos\omega_n(t-t_1)]$$

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی نامتناوب



مثال: پاسخ سیستم یک درجه آزادی بدون مستهلک کننده به نیروی نشان داده شده:

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t+x_0\cos\omega_n t & t<t_1\\[2ex] \dfrac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t+x_0\cos\omega_n t+\dfrac{F_0}{m\omega_n^2}[1-\cos\omega_n(t-t_1)] & t_1<t<t_2\\[2ex] \dfrac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t+x_0\cos\omega_n t+\dfrac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n(t-t_2)-\cos\omega_n(t-t_1)\right] & t>t_2\end{cases}$$

$$m=F_0=1,\omega_n=\sqrt{8},t_1=2,t_2=4,x_0=0.1,v_0=0$$