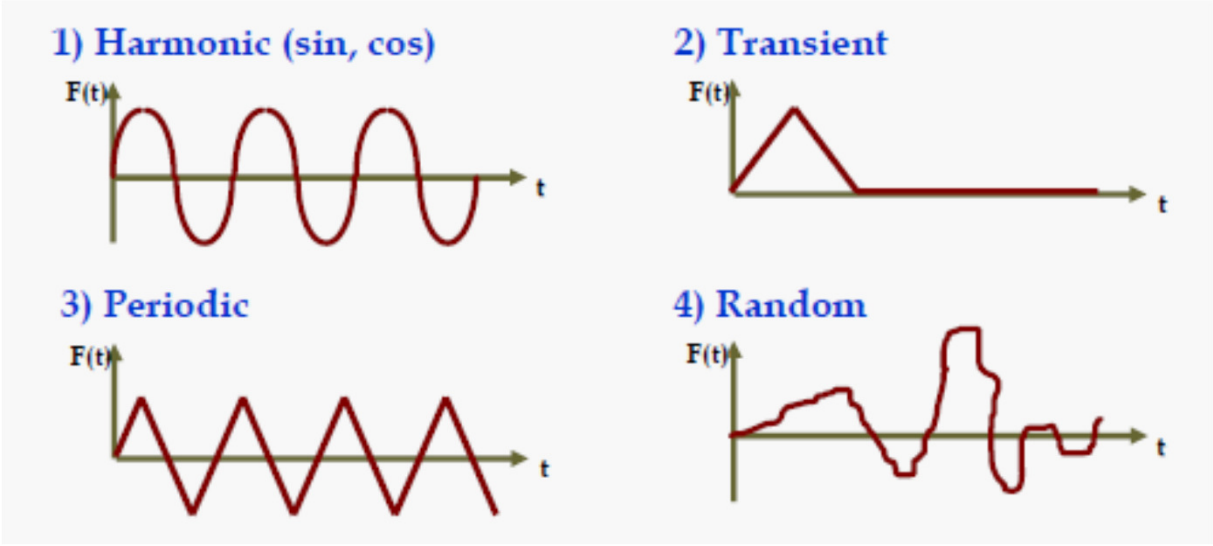
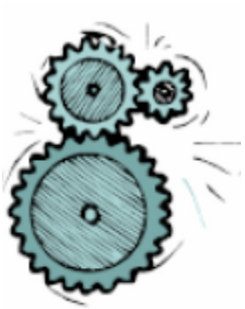
Mechanical Vibration
ارتعاشات مکانیکی(درس پانزدهم)

By: Reza Tikani
Mechanical Engineering Department
Isfahan University of Technology

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی متناوب کلی



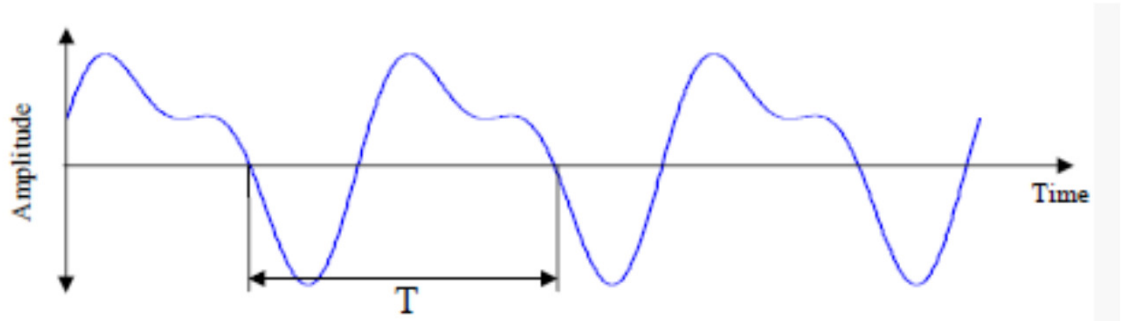


پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی متناوب کلی

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

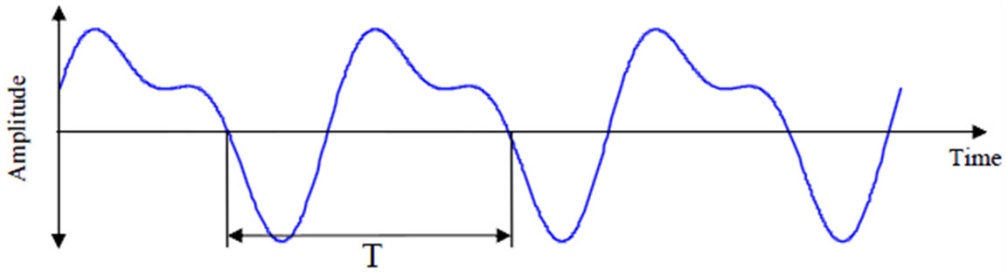
$$F(t) = F(t+\tau)$$

F(t) = General Periodic Force



این نیرو را می توان با استفاده از ضرایب سری فوریه بسط داد.

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی متناوب کلی



یادآوری سری فوریه:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

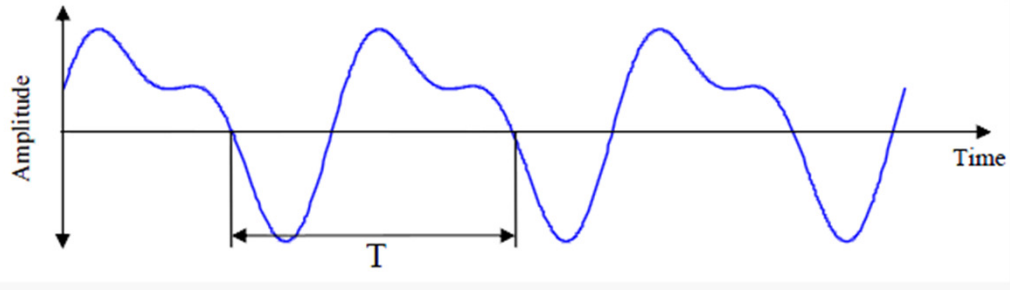
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + a_3\cos(3\omega t) + \cdots$$
$$+ b_1\sin(\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + b_3\sin(3\omega t) + \ldots$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)dt$$

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی متناوب کلی

یادآوری سری فوریه:



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)dt$$

✓ توجه:

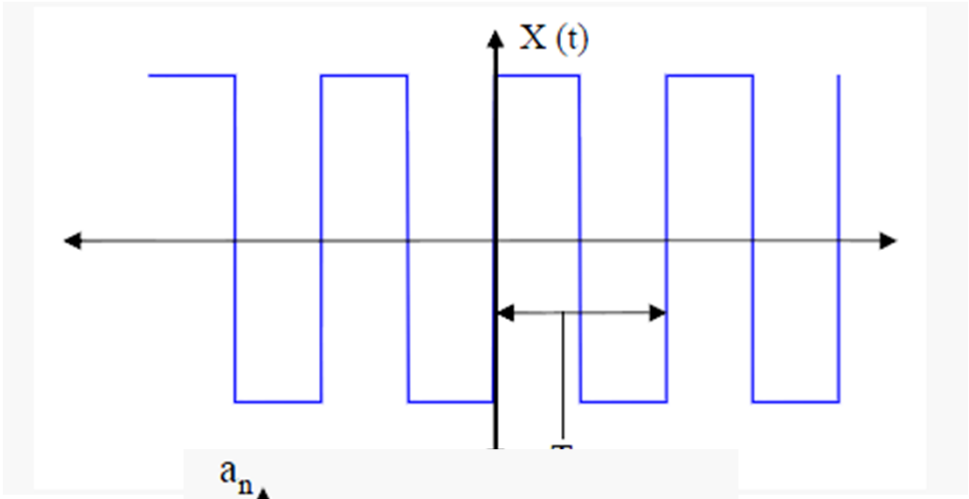
$$\int_0^T \sin(m\omega t)\sin(n\omega t) = \begin{cases} 0 & \text{for } m \neq n \\ \frac{T}{2} & \text{for } m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos(m\omega t)\cos(n\omega t) = \begin{cases} 0 & \text{for } m \neq n \\ \frac{T}{2} & \text{for } m = n \neq 0 \end{cases}$$

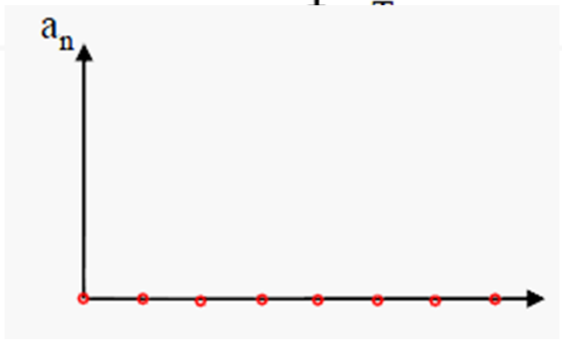
$$\int_0^T \sin(m\omega t)\cos(n\omega t) = 0$$

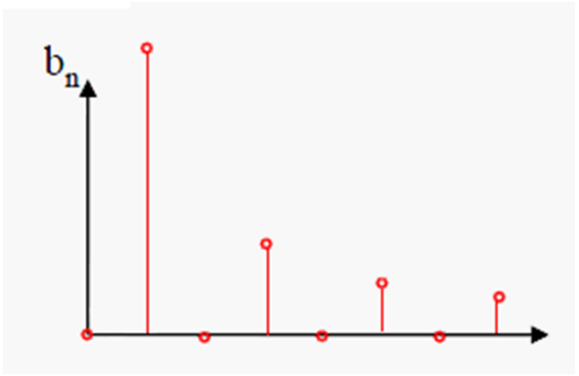
پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی متناوب کلی

یادآوری سری فوریه:



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



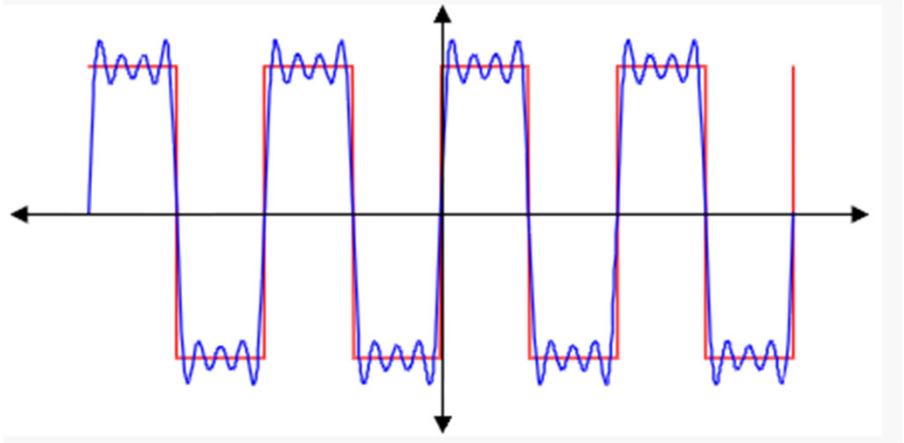


$$x(t) = +\frac{4}{\pi}\sin(\omega t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\omega t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5\omega t) + \frac{4}{7\pi}\sin(7\omega t) + \cdots$$

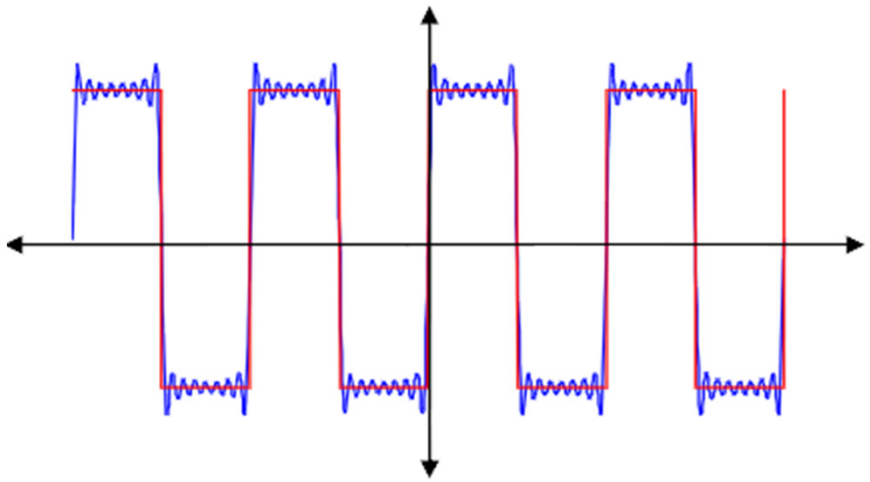
پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی متناوب کلی

یادآوری سری فوریه:

$$x(t) = +\frac{4}{\pi}\sin(\omega t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\omega t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5\omega t) + \frac{4}{7\pi}\sin(7\omega t) + \cdots$$

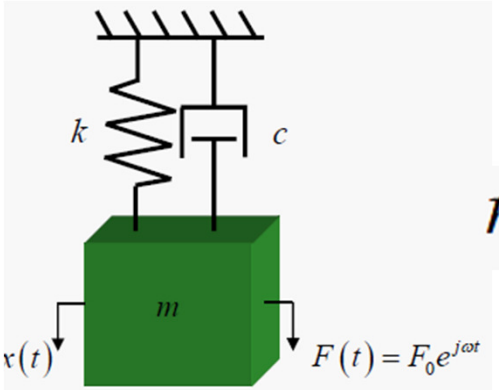


۴ ترم



8 ترم

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی متناوب کلی



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

$$|X_{ss}| = \frac{\left(F_0/k\right)}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad n = 0,1,2,3\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin(n\omega t)\,dt \qquad n = 0,1,2,3\ldots$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی متناوب کلی

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\omega t)$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\frac{a_0}{2} \longrightarrow X_{ss}=\frac{a_0}{2k}$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega t) \longrightarrow X_{ss}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(a_n/k\right)}{\sqrt{\left(1-n^2r^2\right)^2+\left(2\zeta nr\right)^2}}$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\omega t) \longrightarrow X_{ss}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(b_n/k\right)}{\sqrt{\left(1-n^2r^2\right)^2+\left(2\zeta nr\right)^2}}$$

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی متناوب کلی

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(n\omega t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(n\omega t\right)$$

$$x_{ss}\left(t\right)=\frac{a_0}{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(a_n/k\right)}{\sqrt{\left(1-n^2r^2\right)^2+\left(2\zeta nr\right)^2}}\cos\left(n\omega t-\phi_n\right)+\ldots$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(b_n/k\right)}{\sqrt{\left(1-n^2r^2\right)^2+\left(2\zeta nr\right)^2}}\sin\left(n\omega t-\phi_n\right)$$

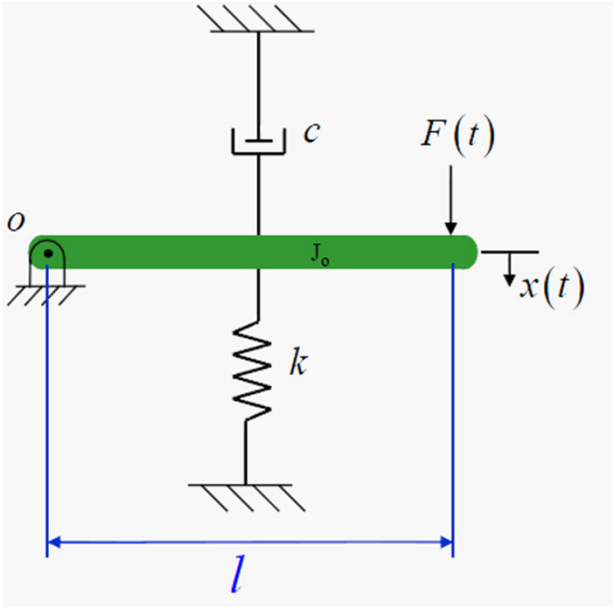
$$\phi_n=\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta nr}{1-n^2r^2}\right)$$

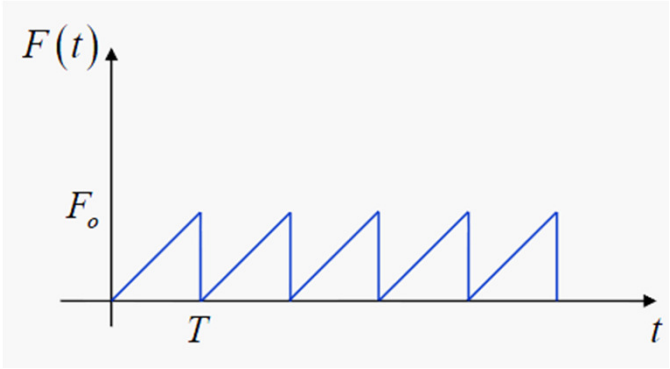
توجه:

- در صورتیکه یکی از ضرایب فرکانسی با فرکانس طبیعی سیستم برابر شود، اندازه دامنه متناظر با آن فرکانس بسیار بزرگ می شود.
- هرچه مقدار n بیشتر شود، ضرایب کاهش می یابند و در نتیجه استفاده از چند جمله اول با دقت خوبی کافی است.

پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نیروی متناوب کلی

تمرین:





$$J_o = 10\ kg\cdot m^2 \qquad l = 1\ m$$

$$c = 40\ \frac{N\cdot \sec}{m} \qquad k = 4000\ \frac{N}{m}$$

$$x(0) = 0 \qquad F_o = 10\pi$$

$$\dot{x}(0) = 0 \qquad T = 1\ \sec$$