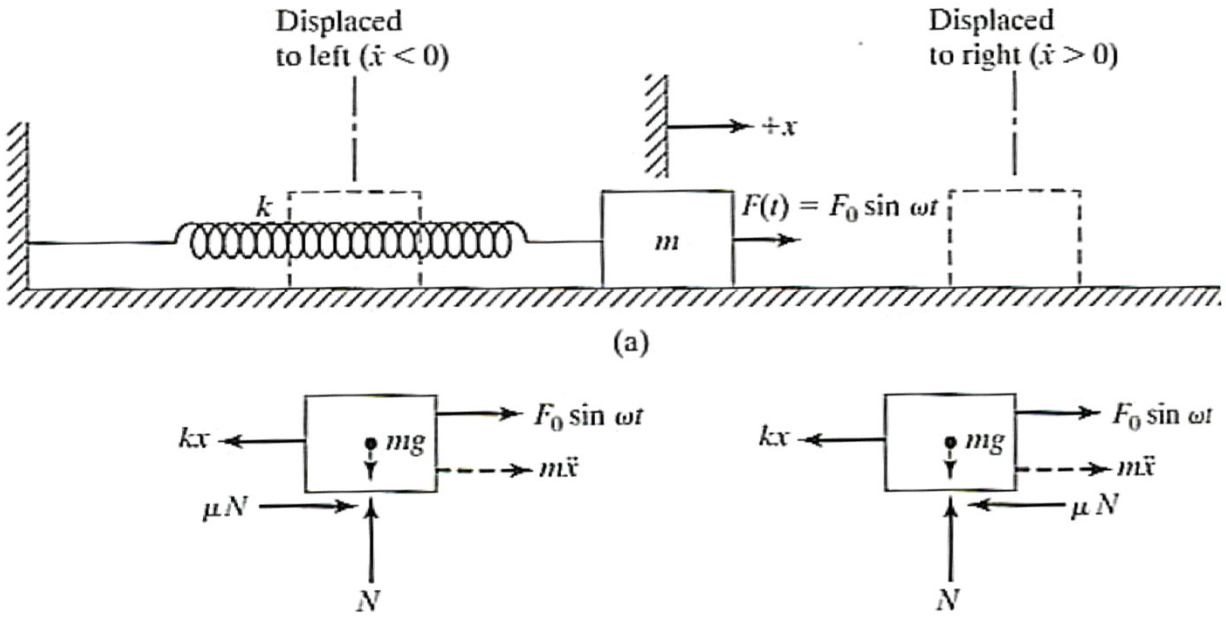
Mechanical Vibration
ارتعاشات مکانیکی(درس چهاردهم)

By: Reza Tikani
Mechanical Engineering Department
Isfahan University of Technology

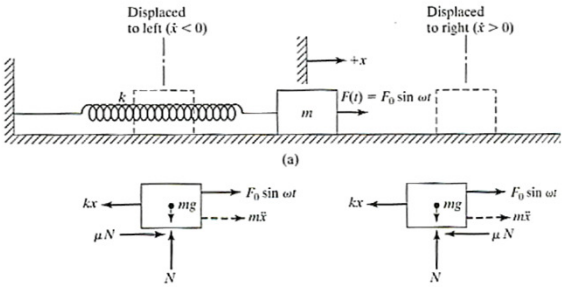
ارتعاش اجباری سیستمهای یک درجه آزادی با اصطکاک خشک



$$m\ddot{x} + \mu mg\,\mathrm{sgn}(\dot{x}) + kx = F_0 \sin \omega t$$

این معادله را با در نظر گرفتن انرژی تلف شده در هر سیکل معادل با انرژی تلف شده در استهلاک ویسکوز به صورت تقریبی حل می کنیم.

ارتعاش اجباری سیستمهای یک درجه آزادی با اصطکاک خشک



انرژی تلف شده در هر سیکل در اثر وجود اصطکاک خشک برابر است با:

$$\Delta E = \mu mg \int_0^{2\pi/\omega} \left[\operatorname{sgn}(\dot{x})\dot{x}\right] dt$$

$$x_{ss}(t) = X \sin \omega t$$

$$u = \omega t$$

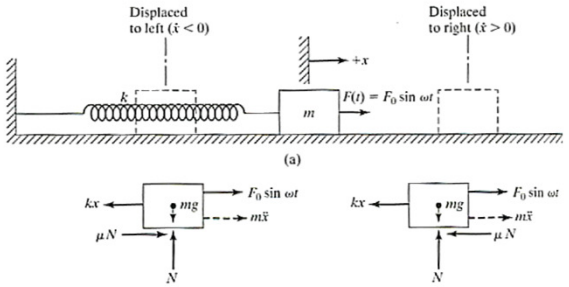
$$\Delta E = \mu mgX \left(\int_0^{\pi/2} \cos u \, du - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos u \, du + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos u \, du \right)$$

$$\boxed{\Delta E = 4\mu mgX}$$

معادل سازی انرژی تلف شده :

$$\pi c_{eq} \omega X^2 = 4\mu mgX \quad \Rightarrow \quad c_{eq} = \frac{4\mu mg}{\pi \omega X} \qquad \zeta_{eq} = \frac{2\mu g}{\pi \omega_n \omega X}$$

ارتعاش اجباری سیستمهای یک درجه آزادی با اصطکاک خشک



$$m\ddot{x} + \mu mg\,\mathrm{sgn}(\dot{x}) + kx = F_0 \sin \omega t$$

$$\ddot{x} + 2\zeta_{eq}\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = f_0 \sin \omega t$$

$$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta_{eq} r)^2}} = \frac{F_0/k}{[(1-r^2)^2 + (4\mu mg/\pi k X)^2]^{1/2}} \Rightarrow X = \frac{F_0}{k}\frac{\sqrt{1-(4\mu mg/\pi F_0)^2}}{|(1-r^2)|}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{2\zeta_{eq} r}{1-r^2} = \tan^{-1}\frac{4\mu mg}{\pi k X(1-r^2)} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{\pm 4\mu mg}{\pi F_0\sqrt{1-(4\mu mg/\pi F_0)^2}}$$

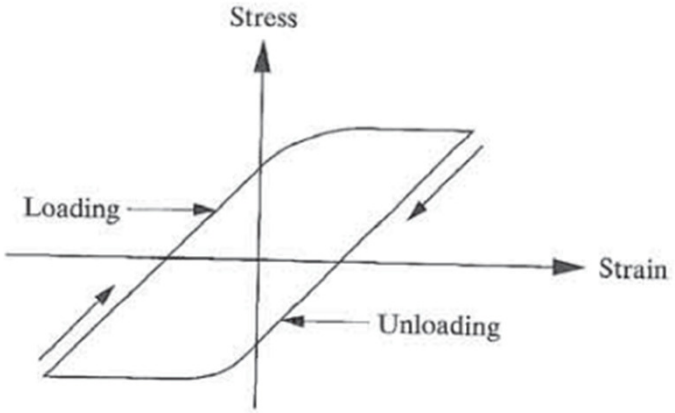
$4\mu mg < \pi F_0$

شرط صحیح بودن تقریب:

$r < 1 \rightarrow \theta$ *is positive*

$r > 1 \rightarrow \theta$ *is negative*

ارتعاش اجباری سیستمهای یک درجه آزادی با استهلاک هیسترتیک



$$\Delta E = \pi k \beta X^2 \qquad h = k\beta$$

ثابت استهلاک هیسترتیک (ثابت میرایی پسماند)

$$\pi c_{eq} \omega X^2 = \pi k \beta X^2 \quad \Rightarrow \quad c_{eq} = \frac{k\beta}{\omega}$$

$$m\ddot{x} + \frac{\beta k}{\omega}\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

$$x_{ss}(t) = X \cos(\omega t - \phi)$$

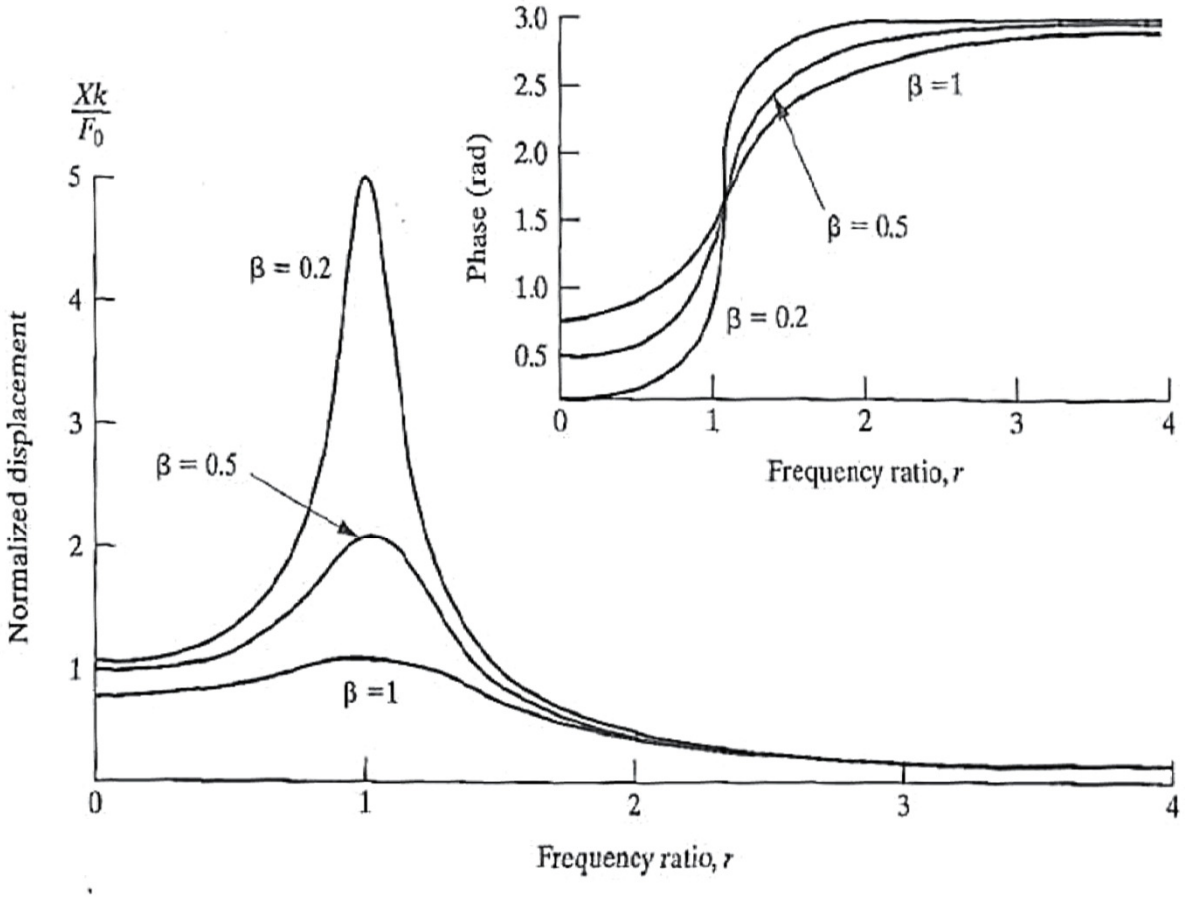
$$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta_{eq} r)^2}} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + \beta^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\beta}{1-r^2}$$

ارتعاش اجباری سیستمهای یک درجه آزادی با استهلاک هیسترتیک

$$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + \beta^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\beta}{1-r^2}$$



ارتعاش اجباری سیستمهای یک درجه آزادی –انواع دیگر استهلاک

حرکت ارتعاشی درون هوا یا سیال:

$$m\ddot{x} + \alpha\,\mathrm{sgn}(\dot{x})\dot{x}^2 + kx = F_0\cos\omega t$$

$$F_d = \alpha\,\mathrm{sgn}(\dot{x})\dot{x}^2 = \frac{C\rho A}{2}\,\mathrm{sgn}(\dot{x})\dot{x}^2$$

$$\Delta E = \frac{8}{3}\alpha X^3\omega^2$$

$$c_{eq} = \frac{8}{3\pi}\alpha\omega X$$