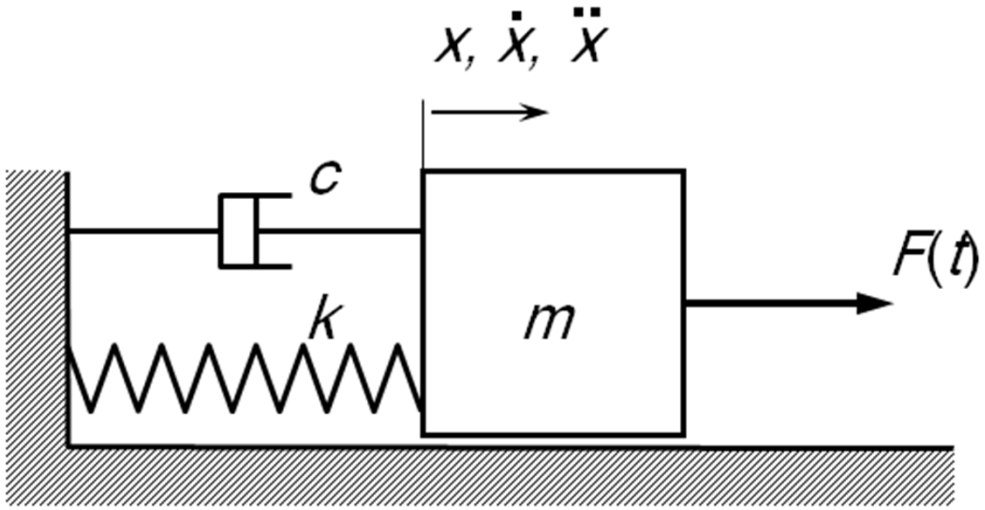
Mechanical Vibration
ارتعاشات مکانیکی(درس یازدهم)

By: Reza Tikani
Mechanical Engineering Department
Isfahan University of Technology

ارتعاش اجباری سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده

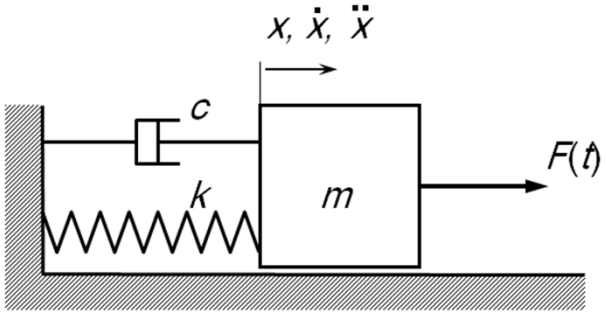


$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$ معادله دیفرانسیل ناهمگن

$\boldsymbol{x_h(t)}$ حل همگن

$\boldsymbol{x_p(t)}$ حل خصوصی

ارتعاش اجباری سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده



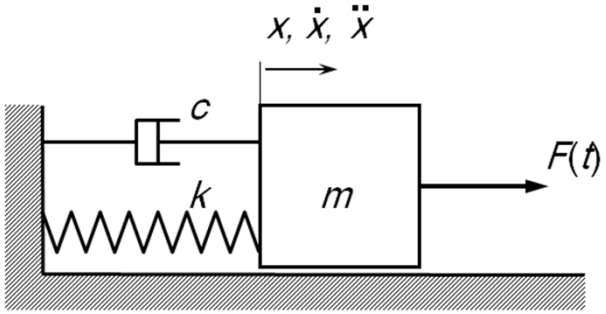
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 Cos(\omega t)$$

$$x(t) = x_{trans}(t) + x_{ss}(t)$$

$$x_{trans}(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right)$$

$$x_{ss}(t) = X\cos(\omega t - \phi)$$

ارتعاش اجباری سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 Cos(\omega t)$$

$$x(t) = x_{trans}(t) + x_{ss}(t)$$

$$x_{ss}(t) = X\cos(\omega t - \phi)$$
$$\dot{x}_{ss}(t) = -\omega X\sin(\omega t - \phi)$$
$$\ddot{x}_{ss}(t) = -\omega^2 X\cos(\omega t - \phi)$$

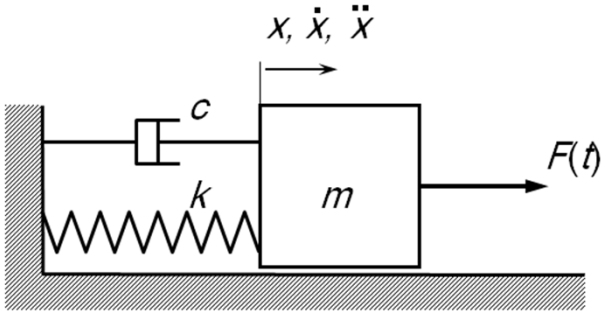
$$-m\omega^2 X\cos(\omega t - \phi) - C\omega X\sin(\omega t - \phi) + KX\cos(\omega t - \phi) = F_o\cos(\omega t)$$

$$\cos(\omega t - \phi) = \cos(\omega t)\cos(\phi) + \sin(\omega t)\sin(\phi)$$
$$\sin(\omega t - \phi) = \sin(\omega t)\cos(\phi) - \cos(\omega t)\sin(\phi)$$

$$\Rightarrow (K - m\omega^2)X\cos(\phi) + C\omega X\sin(\phi) = F_o$$
$$\Rightarrow (-C\omega)X\cos(\phi) + (K - m\omega^2)X\sin(\phi) = 0$$

$$\Rightarrow X = \qquad \Rightarrow \phi =$$

ارتعاش اجباری سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 Cos(\omega t)$$

$$x(t) = x_{trans}(t) + x_{ss}(t)$$

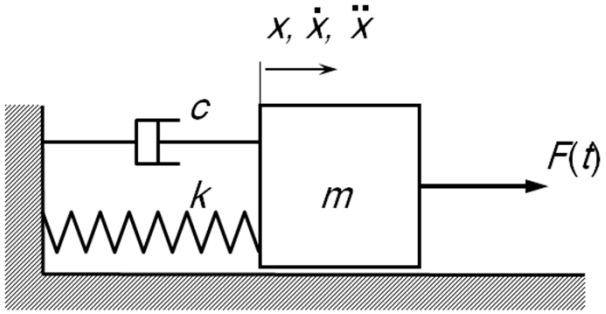
$$x_{ss}(t) = X\cos(\omega t - \phi)$$

$$X = \frac{F_o}{\left[(k - m\omega^2)^2 + (C\omega)^2\right]^{0.5}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{C\omega}{K - m\omega^2}\right)$$

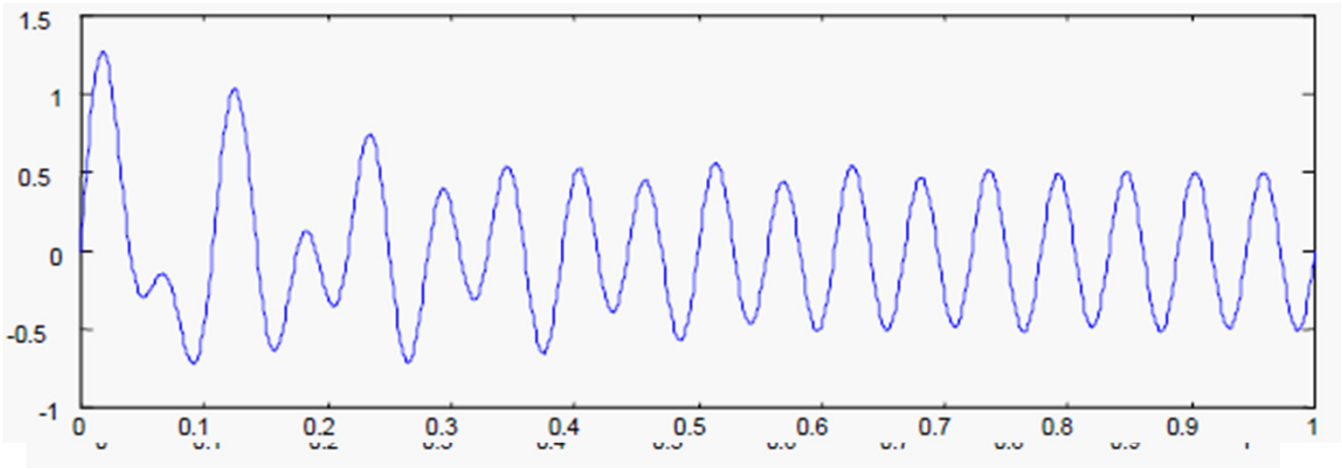
$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right) + X\cos(\omega t - \phi)$$

ارتعاش اجباری سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده

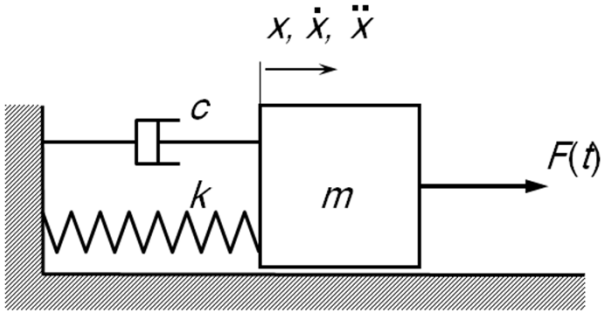


$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 Cos(\omega t)$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right) + X\cos(\omega t - \phi)$$



ارتعاش اجباری سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 Cos(\omega t)$$

$$x_{ss}(t) = X\cos(\omega t - \phi)$$

$$X = \frac{F_o}{\left[(k - m\omega^2)^2 + (C\omega)^2\right]^{0.5}}$$

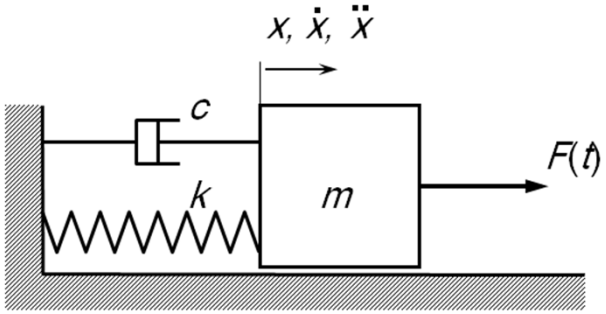
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{C\omega}{K - m\omega^2}\right)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

$$\frac{Xk}{F_o} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}$$

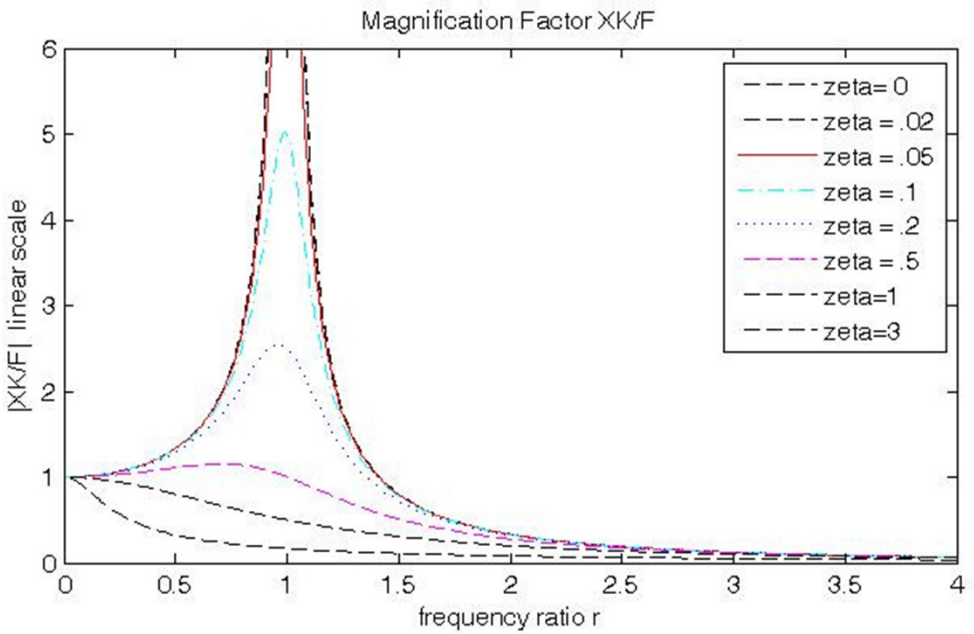
$$\tan\phi = \frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

ارتعاش اجباری سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده

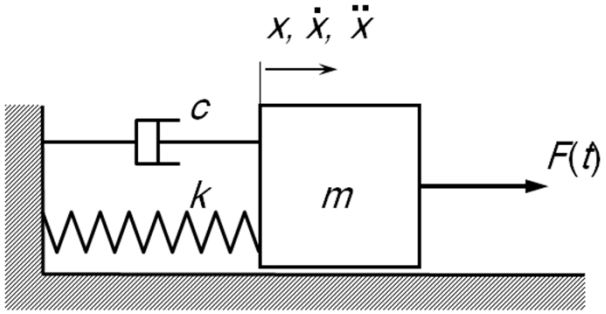


$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 Cos(\omega t)$$

$$\frac{Xk}{F_o} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}$$

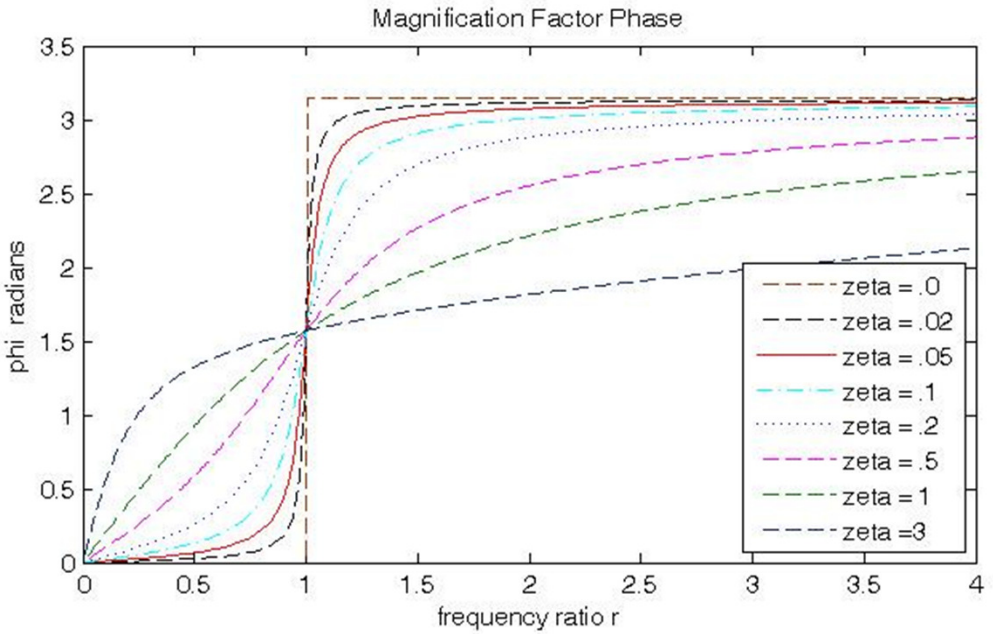


ارتعاش اجباری سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده

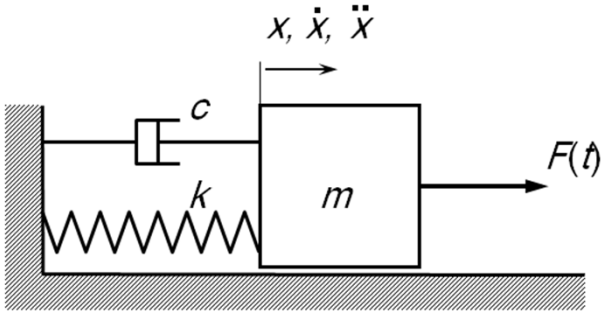


$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 Cos(\omega t)$$

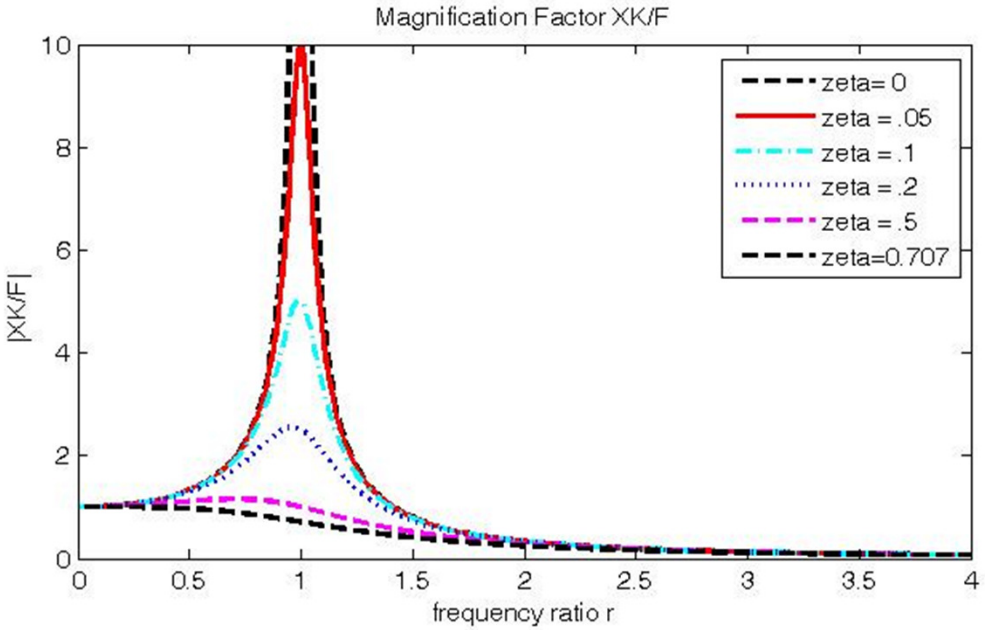
$$\tan\phi = \frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



ارتعاش اجباری سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 Cos(\omega t)$$



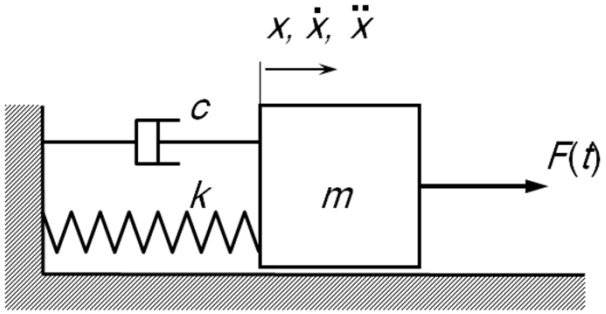
پیدا کردن نقطه ماکزیمم نمودار:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right) = 0$$

$$\frac{Xk}{F_o} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}$$

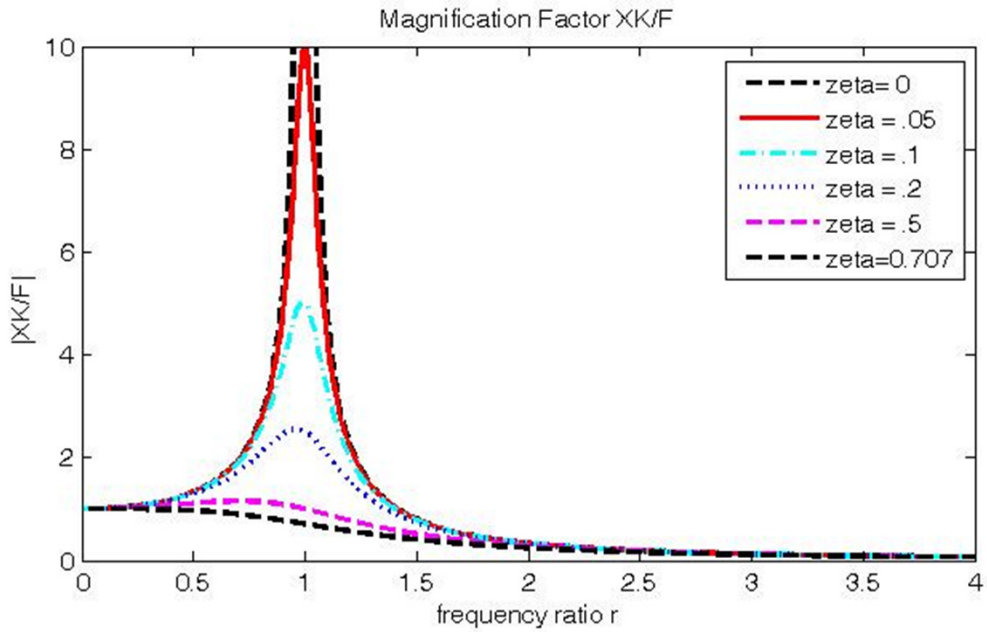
$$r_{max} = \sqrt{1-2\xi^2}$$

ارتعاش اجباری سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 Cos(\omega t)$$

مقدار نسبت دامنه در حالت تشدید (ضریب کیفیت):

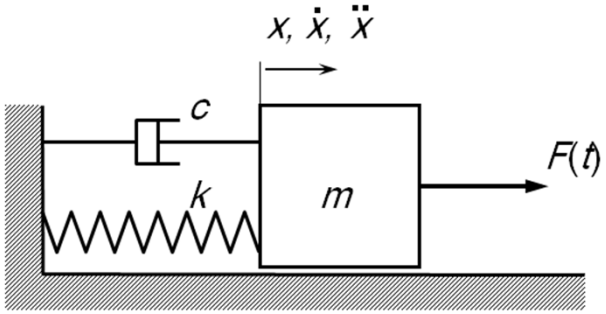


$$Q = \left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

برای ضرایب کوچک استهلاک:

$$Q \approx \frac{1}{2\xi}$$

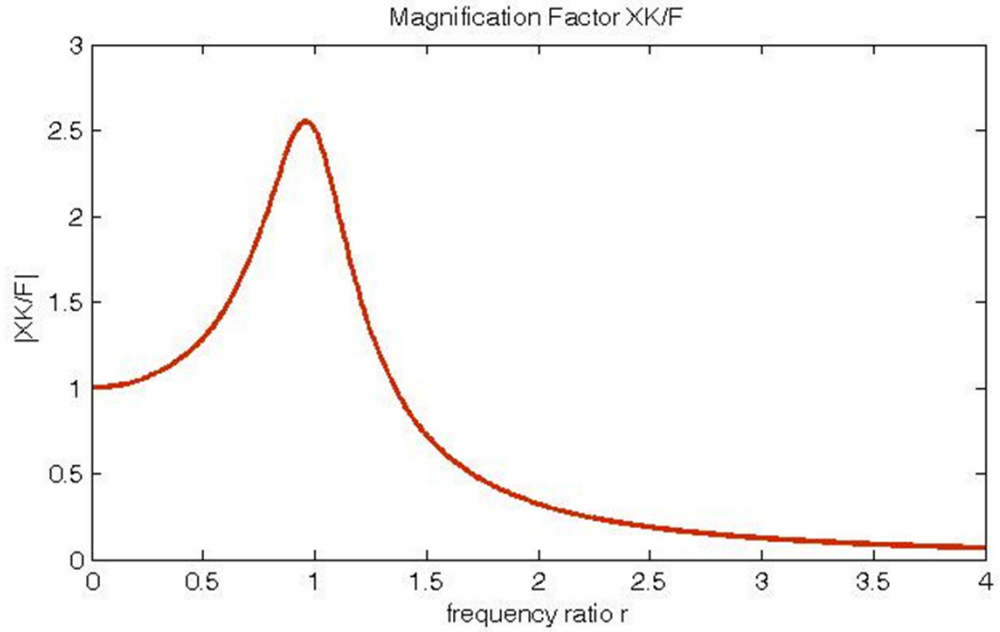
ارتعاش اجباری سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده



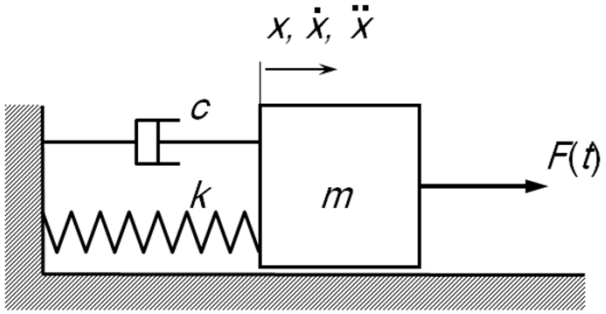
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 Cos(\omega t)$$

نقاط نیم توان:

$$Q \approx \frac{1}{2\xi}$$



ارتعاش اجباری سیستمهای یک درجه آزادی با مستهلک کننده



❖ پاسخ سیستم میرا به نیروی خارجی مختلط:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t}$$