بسم الله الرحمن الرحیم

Mechanical Vibration

ارتعاشات مکانیکی(درس بیست و سوم)

By: Reza Tikani
Mechanical Engineering Department
Isfahan University of Technology

تعیین فرکانسهای طبیعی و مود شیپها

❖ رابطه دانکرلی:

❖ در این روش مقدار تقریبی فرکانس اصلی سیستم بر حسب فرکانسهای طیعی اجزای سیستم بیان می شود (مبنای این روش بر این است که فرکانس اصلی سیستم در مقایسه با دیگر فرکانسهای طبیعی بالاتر دارای مقدار کوچکتری است).

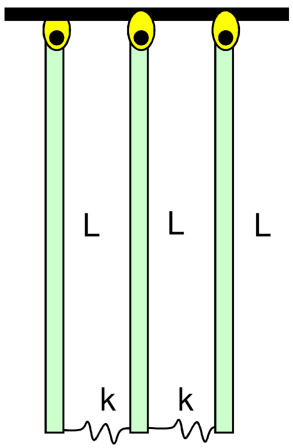
❖ این روش برای سیستمهای با ماتریس جرم قطری کاربرد دارد.

$$[a] = [k]^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\omega_1^2} \cong a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{nn}m_n$$

تعیین فرکانسهای طبیعی و مود شیپها

❖ مثال



$$\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 100+5 & -100 & 0 \\ -100 & 200+5 & -100 \\ 0 & -100 & 100+5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[a] = [k]^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad [a] = \begin{bmatrix} 0.072 & 0.0656 & 0.0625 \\ 0.0656 & 0.0689 & 0.0656 \\ 0.0625 & 0.0656 & 0.072 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\omega_1^2} \cong a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{nn}m_n = 0.072 * \frac{1}{3} + 0.0689 * \frac{1}{3} + 0.072 * \frac{1}{3} = 0.071$$

$$\omega_1^2 = 14.085 \rightarrow \omega_1 = 3.7529$$

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{15} = 3.873}$$

تعیین فرکانسهای طبیعی و مود شیپها

❖ روش ریلی:

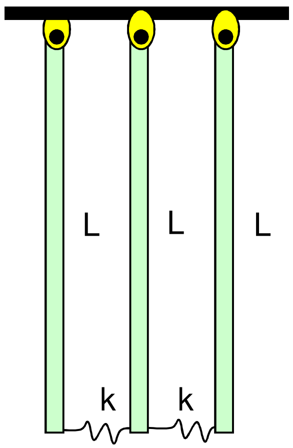
❖ از برابر قرار دادن انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل می توان نتیجه گرفت:

$$\omega^2 = \frac{\vec{X}^T[k]\vec{X}}{\vec{X}^T[m]\vec{X}}$$

در این رابطه $\vec{X}$ نشان دهنده مود شیپ (شکل مود) می باشد.

در صورتی که اندازه بردار $\vec{X}$ دقیق باشد، اندازه به دست آمده برای فرکانس طبیعی متناظر نیز دقیق خواهد بود. برای به دست آوردن مقدار تقریبی از فرکانس طبیعی می توان بردار مود شیپ را به صورت تقریبی در نظر گرفت.

تعیین فرکانسهای طبیعی و مود شیپها



❖ مثال:

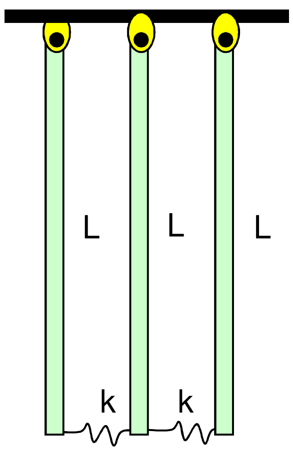
$$\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 100+5 & -100 & 0 \\ -100 & 200+5 & -100 \\ 0 & -100 & 100+5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\omega^2 = \frac{\vec{X}^T[k]\vec{X}}{\vec{X}^T[m]\vec{X}} \qquad \vec{X} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega^2 = \frac{[1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} 105 & -100 & 0 \\ -100 & 205 & -100 \\ 0 & -100 & 105 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{[1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{15}{1} = 15$$

تعیین فرکانسهای طبیعی و مود شیپها

❖ توضیح شکل مودها و گره در آنها:



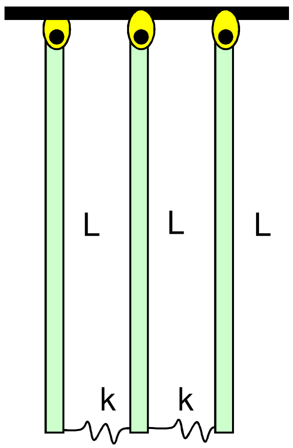
$$\omega_1 = \sqrt{15} \qquad \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = \sqrt{315} \qquad \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_3 = \sqrt{915} \qquad \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

تعیین فرکانسهای طبیعی و مود شیپها

❖ مثال:



$$\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 100+5 & -100 & 0 \\ -100 & 200+5 & -100 \\ 0 & -100 & 100+5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\omega^2 = \frac{\vec{X}^T [k] \vec{X}}{\vec{X}^T [m] \vec{X}} \qquad \vec{X} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega^2 = \frac{[1 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} 105 & -100 & 0 \\ -100 & 205 & -100 \\ 0 & -100 & 105 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{[1 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{815}{1} = 815 \qquad \omega_3 \approx 28.54$$

$$\omega_3 = 30.25$$

تعیین فرکانسهای طبیعی و مود شیپها

❖ روش تکرار ماتریسی:

برای تعیین فرکانس طبیعی اصلی و مود مربوطه به این روش به صورت زیر عمل می شود:

$$[D]^{-1} = [m]^{-1}[k]$$

$$[D]^{-1}\vec{X} = \omega^2[I]\vec{X} = \omega^2\vec{X}$$

بردار فرضی $\vec{X}_1$ را در نظر گرفته و ماتریس $[D]^{-1}$ را در آن پیش ضرب می کنیم، حال ماتریس دقیقتر $\vec{X}_2$ به دست می آید. با تکرار این روش تا جایی که تغییر در بردار $\vec{X}$ ناچیز شود.

تعیین فرکانسهای طبیعی و مود شیپها

❖ مثال:

$$[D] = [k]^{-1}[m] = \begin{bmatrix} 105 & -100 & 0 \\ -100 & 205 & -100 \\ 0 & -100 & 105 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.024 & 0.0219 & 0.0208 \\ 0.0219 & 0.0233 & 0.0219 \\ 0.0208 & 0.0219 & 0.024 \end{bmatrix}$$

$$[D]\vec{X} = \frac{1}{\omega^2}[I]\vec{X} = \frac{1}{\omega^2}\vec{X}$$

$$\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{1}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \qquad [D]\vec{X} = \begin{bmatrix} 0.024 & 0.0219 & 0.0208 \\ 0.0219 & 0.0233 & 0.0219 \\ 0.0208 & 0.0219 & 0.024 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.1302 \\ 0.1333 \\ 0.1365 \end{Bmatrix} = 0.1302 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.024 \\ 1.049 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{2}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.024 \\ 1.049 \end{Bmatrix} \qquad [D]\vec{X} = \begin{bmatrix} 0.024 & 0.0219 & 0.0208 \\ 0.0219 & 0.0233 & 0.0219 \\ 0.0208 & 0.0219 & 0.024 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.024 \\ 1.049 \end{Bmatrix} = 0.0682 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.001 \\ 1.002 \end{Bmatrix}$$

تعیین فرکانسهای طبیعی و مود شیپها

❖ مثال:

$$\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{2}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.024 \\ 1.049 \end{Bmatrix} \quad [D]\vec{X} = \begin{bmatrix} 0.024 & 0.0219 & 0.0208 \\ 0.0219 & 0.0233 & 0.0219 \\ 0.0208 & 0.0219 & 0.024 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.024 \\ 1.049 \end{Bmatrix} = 0.0682 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.001 \\ 1.002 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{3}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.001 \\ 1.002 \end{Bmatrix} \quad [D]\vec{X} = \begin{bmatrix} 0.024 & 0.0219 & 0.0208 \\ 0.0219 & 0.0233 & 0.0219 \\ 0.0208 & 0.0219 & 0.024 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.001 \\ 1.002 \end{Bmatrix} = 0.0667 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{\omega^2} = 0.0667 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = 15$$

تعیین فرکانسهای طبیعی و مود شیپها

❖ روش تکرار ماتریسی:

برای تعیین فرکانسهای طبیعی بعدی داریم:

$$[D_2] = [D_1] - \frac{1}{\omega^2}\vec{X}^{(1)}\vec{X}^{(1)T}[m]$$

در این رابطه $\vec{X}^{(1)}$ یک بردار متعامد است، یعنی:

$$\vec{X}^{(1)T}[m]\vec{X}^{(1)} = 1$$

به عنوان مثال:

$$\vec{X}^{(1)} = \alpha\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix} \Rightarrow \alpha^2\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}^T[m]\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix} = 1 \Rightarrow \alpha^2 = 1$$

ادامه روش مانند قبل است.

تعیین فرکانسهای طبیعی و مود شیپها

$$[D_2]=\begin{bmatrix}0.024 & 0.0219 & 0.0208\\ 0.0219 & 0.0233 & 0.0219\\ 0.0208 & 0.0219 & 0.024\end{bmatrix}-\frac{1}{15}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0427 & 0.0219 & 0.0208\\ 0.0219 & -0.0437 & 0.0219\\ 0.0208 & 0.0219 & -0.0427\end{bmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{X}}_{\mathbf{1}}=\begin{Bmatrix}1\\2\\3\end{Bmatrix}\qquad [D_2]\vec{X}=\begin{bmatrix}-0.0427 & 0.0219 & 0.0208\\ 0.0219 & -0.0437 & 0.0219\\ 0.0208 & 0.0219 & -0.0427\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\2\\3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.0635\\0\\-0.0635\end{Bmatrix}$$