بسمه تعالی

پاسخ تکلیف سری چهارم درس ارتعاشات مکانیکی

مسأله اول:

الف) ابتدا انرژی‌های جنبشی و پتانسیل سیستم را به دست می‌آوریم که برای انرژی جنبشی داریم:

$$T=\frac{1}{2}I_O\omega_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2+\frac{1}{2}I_p\dot{\varphi}^2$$

که در آن:

$$x_1=R\theta_1 \quad\rightarrow\quad \theta_1=x_1/R \quad\rightarrow\quad \omega_1=\dot{x}_1/R$$

$$\left.\begin{array}{l} x_B=x_1=r\varphi \\ x_A=2r\varphi \end{array}\right\} \quad\rightarrow\quad x_A=2x_1$$

و برای انرژی پتانسیل نیز داریم:

$$V=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2(x_2-x_A)^2+\frac{1}{2}k_3(x_3-x_2)^2$$

و یا به طور ساده‌تر:

$$\begin{cases} T=\frac{1}{2}I_O\frac{\dot{x}_1^2}{R^2}+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2+\frac{1}{2}I_p\frac{\dot{x}_1^2}{r^2} \\ V=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2(x_2-2x_1)^2+\frac{1}{2}k_3(x_3-x_2)^2 \end{cases}$$

حال با توجه به رابطه لاگرانژ، داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}=\frac{I_O}{R^2}\dot{x}_1+\frac{I_p}{r^2}\dot{x}_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}=k_1x_1-2k_2(x_2-2x_1)$$

و در نتیجه:

Isfahan University of Technology

معادله اول: $\left(\frac{I_O}{R^2}+\frac{I_p}{r^2}\right)\ddot{x}_1+(k_1+4k_2)x_1-2k_2x_2=0$

دقت کنید که در رابطه لاگرانژ، $\frac{\partial T}{\partial x_i}=0$ می باشد.

همچنین، برای جرم‌های دوم و سوم نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}=m_2\dot{x}_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2}=k_2(x_2-2x_1)-k_3(x_3-x_2)$$

معادله دوم: $m_2\ddot{x}_2-2k_2x_1+(k_2+k_3)x_2-k_3x_3=0$

و

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}=m_3\dot{x}_3$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3}=k_3(x_3-x_2)$$

معادله سوم: $m_3\ddot{x}_3+k_3x_3-k_3x_2=0$

بدین ترتیب، دستگاه معادلات حرکت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} I_O/R^2+I_p/r^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{x}_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+4k_2 & -2k_2 & 0 \\ -2k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

همچنین داریم:

$$I_O=\frac{1}{2}m_1R^2+m_1R^2=\frac{3}{2}m_1R^2 \quad \rightarrow \quad \frac{I_O}{R^2}=\frac{3}{2}\times 10=15$$

Isfahan University of Technology

$$\frac{I_p}{r^2}=\frac{1.4}{(1/4)^2}=22.4$$

که با جایگذاری در رابطه بالا، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 37.4 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 210000 & -90000 & 0 \\ -90000 & 55000 & -10000 \\ 0 & -10000 & 10000 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ب) اما برای تعیین فرکانس‌های طبیعی، بایستی دترمینان ماتریس ضرایب زیر برابر صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} 210000-37.4\omega^2 & -90000 & 0 \\ -90000 & 55000-20\omega^2 & -10000 \\ 0 & -10000 & 10000-40\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

که با محاسبه آن، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(210000-37.4\omega^2)\times[(55000-20\omega^2)(10000-40\omega^2)-1\times10^8] \\ +90000\times(-90000)(10000-40\omega^2)=0\end{aligned}$$

که نتیجه خواهد داد:

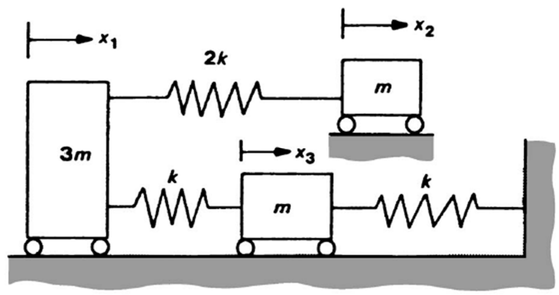
$$-29920\omega^6+1065.6\times10^5\,\omega^4-5034.43\omega^2-175.5\times10^{10}=0\,.$$ ■

Isfahan University of Technology

بسمه تعالی

پاسخ تکلیف سری چهارم درس ارتعاشات مکانیکی

مسئله ۲:



$$m = 5\,\text{kg}, \;\; k = 20\,\text{kN/m}$$

حل:

الف) ابتدا با رسم دیاگرام آزاد هر یک از جرم‌ها و نوشتن معادله نیوتن، خواهیم داشت:

$$3m\ddot{x}_1 = -2k(x_1 - x_2) - k(x_1 - x_3)$$

$$m\ddot{x}_2 = -2k(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_1) - kx_3$$

در نتیجه، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 3m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - 2kx_2 - kx_3 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - 2kx_1 + 2kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_3 - kx_1 + 2kx_3 = 0 \end{cases}$$

که با توجه به آن، می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} 3m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -2k & -k \\ -2k & 2k & 0 \\ -k & 0 & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

که در نتیجه، ماتریس‌های جرم و سختی بدین صورت به دست می‌آید:

Isfahan University of Technology

بسمه تعالی

پاسخ تکلیف سری چهارم درس ارتعاشات مکانیکی

$$[\mathrm{M}]=\begin{bmatrix}15 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [\mathrm{K}]=20000\begin{bmatrix}3 & -2 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

ب) با استفاده از روش ضرایب تأثیر و با اعمال نیروی واحد به جرم $3m$، می‌توان جابجایی هر یک از جرم‌ها را در اثر اعمال این نیرو به دست آورد که در این صورت خواهیم داشت:

$$a_{11}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k}=\frac{2}{k}, \quad a_{21}=\frac{2}{k} \quad \text{و} \quad a_{31}=\frac{1}{k}$$

$$a_{12}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k}=\frac{2}{k}, \quad a_{22}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}=\frac{5}{2k} \quad \text{و} \quad a_{32}=\frac{1}{k}$$

$$a_{13}=\frac{1}{k}, \quad a_{23}=\frac{1}{k} \quad \text{و} \quad a_{33}=\frac{1}{k}$$

بنابراین، ماتریس $[a]$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[a]=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 5/2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}/k=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 2.5 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}/20000$$

دقت کنید که $[a].[\mathrm{K}]=I$ می‌باشد، یعنی دو ماتریس، معکوس یکدیگرند.

ج) حال، با توجه به ماتریس به دست آمده، یعنی ماتریس $[a]$ می‌توان با استفاده از روش دانکرلی به صورت زیر، فرکانس اول سیستم را به دست آورد:

$$\begin{aligned}1/\omega_1^2 &\approx a_{11}m_1+a_{22}m_2+\cdots+a_{nn}m_n\\ &\approx a_{11}m_1+a_{22}m_2+a_{33}m_3=3m.\frac{2}{k}+m\frac{5}{2k}+m\frac{1}{k}=9.5\frac{m}{k}\end{aligned}$$

و بنابراین:

$$\omega_1^2=\frac{1}{9.5}\frac{k}{m} \quad \rightarrow \quad \omega_1=\frac{1}{\sqrt{9.5}}\sqrt{\frac{20000}{5}}\approx 20\ \mathrm{rad/s}.\blacksquare$$

Isfahan University of Technology