باسمه تعالی

تکلیف سری دوم درس ارتعاشات غیرخطی **موعد تحویل: ۹۵/۱/۲۲**

۱- با استفاده از تابع لیاپانوف $V = ax^2 + by^2$ و انتخاب مناسب ضرایب، نشان دهید سیستم زیر دارای مسیر بسته نیست.

$$\dot{x} = y - x^3, \dot{y} = -x - y^3$$

۲- با استفاده از تابع لیاپانوف $V = x^m + ay^m$ و انتخاب مناسب ضرایب، نشان دهید سیستم زیر دارای پاسخ پریودیک نیست.

$$\dot{x} = -x + 2y^3 - 2y^4 , \qquad \dot{y} = -x - y + xy$$

۳- سیستم روبرو را درنظر بگیرید: $\dot{x} = x^2 - y - 1 , \dot{y} = y(x-2)$

الف) نشان دهید این سیستم دارای سه نقطه تعادل است و نوع هر یک را مشخص نمایید.

ب) با کمک خط عبوری از این نقاط نشان دهید که هیچ مسیر بسته‌ای وجود ندارد.

ج) مسیرهای فاز را رسم نمایید.

۴- سیستم روبرو را در نظر بگیرید: $\dot{x} = f(x,y) = y + 2xy \ \ , \dot{y} = g(x,y) = x + x^2 - y^2$

الف) نشان دهید $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ و ثابت کنید این شرط اشاره به یک سیستم گرادیانی دارد.

ب) V را بدست آورید.

ج) مسیرهای فاز را رسم نمایید.

۵- سیستم روبرو را درنظر بگیرید: $\dot{x} = x - y - x(x^2 + 5y^2) \ \ , \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2)$

الف) نوع نقطه تعادل در مبدا را تعیین نمایید.

ب) سیستم را در مختصات قطبی بازنویسی نمایید (به کمک $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$ و $r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}$)

ج) ماکزیمم شعاع دایره‌ای حول مبدا را بدست آورید که مسیرها به سمت بیرون از آن هستند.

د) مینیمم شعاع دایره‌ای حول مبدا را بدست آورید که مسیرها به سمت داخل آن هستند.

ه) ثابت کنید که سیستم دارای یک سیکل حدی بین این دو دایره است.

باسمه تعالی

تکلیف سری دوم درس ارتعاشات غیرخطی   موعد تحویل: ۹۵/۱/۲۲

و) سیکل حدی را به کمک روش عددی در نرم‌افزار MATLAB رسم نمایید و نشان دهید سیکل حدی بین دو دایره بدست آمده از قسمت‌های "ج" و "د" است.

۶- نشان دهید سیستم زیر دارای دقیقاً یک سیکل حدی است. نوع پایداری این سیکل حدی را مشخص نمایید.

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + \tanh x = 0, for\ \mu > 0$$

۷- در مثال حل شده در کلاس با استفاده از تئوری پوانکاره بندیکسون نشان داده شد که سیستم زیر دارای یک مسیر بسته در حلقه $\sqrt{1-\mu} < r < \sqrt{1+\mu}$ به ازای همه مقادیر $\mu < 1$ است.

$$\dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r cos\theta$$
$$\dot{\theta} = 1$$

الف) برای به دست آوردن شکل $r(\theta)$ برای مقادیر $\mu \ll 1$، پاسخ را به صورت سری توانی به صورت $r(\theta) = 1 + \mu r_1(\theta) + O(\mu^2)$ در نظر بگیرید و سری را در معادله دیفرانسیلی $dr/d\theta$ جایگذاری نمایید. از ترم‌های $O(\mu^2)$ صرفنظر کنید و عبارت دیفرانسیلی ساده‌ای برای $r_1(\theta)$ به دست آورید. این معادله را به صورت صریح حل کنید.

ب) ماکزیمم و مینیمم r را با منحنی تقریبی بدست آورید و نشان دهید طبق انتظار درون حلقه $\dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r cos\theta$ قرار دارد.

ج) به کمک حل کامپیوتری، $r(\theta)$ را برای مقادیر مختلف کوچک μ رسم کنید و با رسم نمودار حل تحلیلی تقریبی از قسمت الف، نشان دهید خطای ماکزیمم چه رابطه‌ای با μ دارد.

باسمه تعالی

تکلیف سری دوم درس ارتعاشات غیرخطی   موعد تحویل: ۹۵/۱/۲۲

7.3.9 (Series approximation for a closed orbit) In Example 7.3.1, we used the Poincaré–Bendixson Theorem to prove that the system $\dot{r} = r(1-r^2) + \mu r\cos\theta$, $\dot{\theta} = 1$ has a closed orbit in the annulus $\sqrt{1-\mu} < r < \sqrt{1+\mu}$ for all $\mu < 1$.

a) To approximate the shape $r(\theta)$ of the orbit for $\mu << 1$, assume a power series solution of the form $r(\theta) = 1 + \mu r_1(\theta) + O(\mu^2)$. Substitute the series into a differential equation for $dr/d\theta$. Neglect all $O(\mu^2)$ terms, and thereby derive a simple differential equation for $r_1(\theta)$. Solve this equation explicitly for $r_1(\theta)$. (The approximation technique used here is called regular perturbation theory; see Section 7.6.)

b) Find the maximum and minimum r on your approximate orbit, and hence show that it lies in the annulus $\sqrt{1-\mu} < r < \sqrt{1+\mu}$, as expected.

c) Use a computer to calculate $r(\theta)$ numerically for various small μ, and plot the results on the same graph as your analytical approximation for $r(\theta)$. How does the maximum error depend on μ?